Erschienen in: Mathematische Unterrichtspraxis, H. 2, 2000, S. 28–37

Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen – eine Unterrichtsreihe für das 4. bis 6. Schuljahr

von Ulrich Schwätzer & Christoph Selter

Gerade in Zeiten, in denen nicht zuletzt in Reaktion auf die TIMS-Studie die Gefahr droht, daß der Mathematikunterricht in der Grundschule auf ein bloßes Rechentraining zur Bewältigung von einseitig ausgerichteten Testanforderungen reduziert wird, ist es erforderlich, offensiv dafür einzutreten, daß die *allgemeinen Lernziele* des Mathematikunterrichts (wie entdecken, argumentieren, darstellen) nicht in Vergessenheit geraten und daß auch im Mathematikunterricht zentrale Dimensionen des schulischen Bildungs- und Erziehungsauftrags verfolgt werden (Selbständigkeit, Mitbestimmung, Mitverantwortung, Kooperationsfähigkeit usw.).

Um diesen Zielsetzungen nachzukommen, sind u. a. beziehungsreiche, mathematisch substantielle Aufgabenkontexte geeignet. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daß sie vergleichsweise leicht verständliche, herausfordernde Problemstellungen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades beinhalten, die jeweils mit mehr als einer einzigen Vorgehensweise auf verschiedenen Niveaus anzugehen sind. Sie unterscheiden sich also einerseits von sog. *Routine*aufgaben, bei denen ein bereits im Unterricht behandelter Lösungsweg einzuschlagen ist, und andererseits von sog. *Problem*aufgaben, zu deren Lösung man einen eng umrissenen, häufig plötzlichen Einfall benötigt.

Welche Denkweisen Schülerinnen und Schüler in der Auseinandersetzung mit solchen Aufgabenkontexten entwickeln und wie sie diese in eine produktive Mitgestaltung des Unterrichts einbringen können, ist bislang kaum bekannt. Wir versuchen im vorliegenden Beitrag, diesen Mangel zumindest für den Aufgabenkontext 'Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen' zu beheben.

1 DIE AUFGABE

Beim Aufgabenkontext 'Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen' geht es darum, verschiedene, unterschiedlich anspruchsvolle Probleme zu lösen, die sich im Umkreis von Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ergeben. Im 2. Schuljahr beispielsweise kann man die Schüler bitten, jeweils drei Reihenfolgezahlen zu addieren, z. B.: 2+3+4 oder 13+14+15 oder …, und sich ergebende Auffälligkeiten zu erkennen, zu beschreiben und ggf. sogar zu begründen. Im 8. Schuljahr könnte die Aufgabe lauten: Finde alle Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen (also nicht nur diejenigen mit drei Summanden), deren Ergebnis 1000 ist! Versuchen Sie doch selbst einmal, alle Lösungen zu finden, bevor Sie weiterlesen!

Die Aufgabenstellung für das 4. Schuljahr, von der wir im weiteren berichten werden, bestand darin, alle Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen zu finden, deren Resultat nicht größer ist als 25. Aus der Tabelle 1 ist ersichtlich, daß es hier 27 verschiedene Lösungen gibt.

Eine solche beziehungsreiche Auflistung bildet jedoch in der Regel bei Schülern der Klasse 4 nicht den Ausgangs-, sondern bestenfalls den (vorläufigen) Endpunkt der Auseinandersetzung mit dieser Problemstellung. Wie die weiteren Kapitel zeigen werden, gehen in der Regel zunächst unsystematischere, tastende Vorgehensweisen voran, die aber zunehmend geordneter, systematischer werden bzw. dazu angeregt werden können.

Tabelle 1: Alle möglichen Summen

1					
2					
3	1+2				
4					
5	2+3				
6		1+2+3			
7	3+4				
8					
9	4+5	2+3+4			
10			1+2+3+4		
11	5+6				
12		3+4+5			
13	6+7				
14			2+3+4+5		
15	7+8	4+5+6		1+2+3+4+5	
16					
17	8+9				
18		5+6+7	3+4+5+6		
19	9+10				
20				2+3+4+5+6	
21	10+11	6+7+8			1+2+3+4+5+6
22			4+5+6+7		
23	11+12				
24		7+8+9			
25	12+13			3+4+5+6+7	

2 VORGEHENSWEISEN VON VIERTKLÄßLERN

Um mehr über die spontan sich entwickelnden Denkweisen zu erfahren, führten wir mit insgesamt 18 Viertkläßlern Zweierinterviews durch, die sich in 3 Phasen gliederten:

1. *Verstehen der Aufgabenstellung*: Den Schülern wurde der Begriff „Reihenfolgezahlen“ erklärt und sie wurden gebeten, anhand einiger Beispiele falsche und richtige Summen aus Reihenfolgezahlen zu identifizieren sowie anschließend einige selbst zu bilden. Dann wurde ihnen die Aufgabe gestellt, möglichst viele Summen mit Reihenfolgezahlen mit dem Ergebnis kleiner oder gleich 25 zu finden.

2. *Produktion von Lösungen*: Die Schüler fanden gemeinsam Lösungen und notierten die Summen auf einem Blatt. Innerhalb dieser Phase war häufig zu beobachten, daß die Kinder zunächst einige Aufgaben notierten, bis dieser Prozeß ins Stocken kam, und sie der Meinung waren, sie hätten nun alle möglichen Lösungen gefunden. Durch Fragen wie „Seid ihr euch sicher, daß ihr alle gefunden habt?“ oder „Warum sind das alle?“ regte der Interviewer dann häufig die Produktion weiterer Lösungen an.

3. *Begründung der Vollständigkeit*: Waren die Schüler schließlich überzeugt, daß sich keine weiteren Lösungen mehr finden ließen, wurden sie gebeten, die Vollständigkeit zu begründen. Dazu standen ihnen leere Blätter, Schere und Klebstoff zur Verfügung.

Zu Beginn der Interviews schienen viele Schüler zunächst einmal auszuprobieren bzw. diejenigen Möglichkeiten zu nennen, die ihnen spontan einfielen. Nach einer gewissen Anlaufzeit jedoch ließen sich folgende, systematischere Findestrategien beobachten.

1. *Hinten verlängern*
   An eine Summe wird der ‚folgende‘ Summand angehängt (3+4+5 –> 3+4+5+6).

2. *Vorne verlängern*
   Einer Summe wird der ‚vorangehende‘ Summand vorangestellt (3+4+5 –> 2+3+4+5).

3. *Hinten verkürzen*
   Der letzte Summand einer Summe wird entfernt (3+4+5 –> 3+4).

4. *Vorne verkürzen*
   Der erste Summand einer Summe wird entfernt (3+4+5 –> 4+5).

5. *Alle erhöhen*
   Alle Summanden werden um 1 erhöht (3+4+5 –> 4+5+6).

6. *Alle vermindern*
   Alle Summanden werden um 1 vermindert (3+4+5 –> 2+3+4).

7. *Mit ‚Nachfolger‘ beginnen*

Als erster Summand wird der Nachfolger des größten Summanden einer bereits gefundenen Summe notiert (3+4+5 –> Summe mit 6 als erstem Summanden, z. B. 6+7+8).

8. *Mit ‚letzter Zahl' beginnen*
   Als erster Summand wird der letzte Summand einer bereits gefundenen Summe verwendet (3+4+5 –> Summe mit 5 als erstem Summanden, z. B. 5+6).

9. *Mit Ergebnis beginnen*
   Als erster Summand wird das Ergebnis einer bereits gefundenen Summe verwendet (3+4+5 –> Summe mit 12 als erstem Summanden, also 12+13).

Außerdem ließen sich Kombinationen aus verschiedenen Vorgehensweisen feststellen. So haben einige Kinder beispielsweise zunächst ‚hinten verlängert' und dann ‚vorne verkürzt' (3+4+5 –> 3+4+5+6 –> 4+5+6). Die Wirkung der Hintereinanderausführung dieser beiden Operationen unterscheidet sich zwar nicht von der Vorgehensweise ‚alle erhöhen'. Dennoch macht es u. E. Sinn, diese kombinierte Vorgehensweise gesondert aufzuzählen, da ihr eine andere Denkweise zugrundeliegt.

Des öfteren führten die Schüler dieselbe Operation mehrfach hintereinander aus. Beispielsweise erzeugten sie durch zweimaliges Anwenden von ‚vorne verlängern' aus 3+4+5 die neue Möglichkeit 1+2+3+4+5 oder durch zweimaliges Durchführen von ‚hinten verlängern' aus 3+4+5 die Summe 3+4+5+6+7. Die wiederholte Nutzung einer Vorgehensweise erfolgte in der Regel so lange, bis die Schüler an eine ‚Grenze' stießen (‚), also entweder das Ergebnis 25 erzielten bzw. überschritten oder Summen mit 1 als erstem Summanden erhielten.

Es ist ein Charakteristikum der bislang aufgezählten Vorgehensweisen, daß die Schüler sich jeweils auf eine der bereits notierten Summen bezogen (Referenzaufgabe). Von einem übergreifenden Motiv ist die zehnte Vorgehensweise bestimmt.

10. *Durchmustern der ersten Summanden*
    Es wird geprüft, ob sämtliche Zahlen kleiner als 13 als erster Summand vorkommen. Sollte eine dieser Zahlen noch nicht berücksichtigt worden sein, so wird eine Summe gebildet, deren erster Summand gerade diese Zahl ist.

Diese Strategien wurden allerdings häufig nicht konsequent, sondern wechselhaft springend angewendet, d. h. für einen gewissen Zeitraum wurde die Strategie x verwendet, dann die Strategie y usw. Auch sollte angemerkt werden, daß sich einige Schüler zwischendurch kurzzeitig wieder vom strategischen Vorgehen lösten, sie aber dann relativ schnell dazu zurückkehrten. Im Verlauf der 2. Phase setzten sich in den meisten Zweiergruppen nach und nach die leistungsfähigeren Strategien durch, also diejenigen, mit denen prinzipiell auch die Vollständigkeit begründet werden kann.

Auch in der hierfür vorgesehenen dritten Phase des Interviews gingen die Kinder unterschiedlich vor. Die meisten sortierten spontan die gefundenen Lösungen entweder durch geordnetes Abschreiben oder durch Ausschneiden und Umordnen, manche erhielten dazu einen entsprechenden Interviewer-Impuls. In der Regel wurden dann die eventuell noch fehlenden Aufgaben gefunden bzw. doppelte eliminiert.

Betrachtet man die Tabelle 1, so ist klar, daß es beim Sortieren mehrere Möglichkeiten gibt. Man kann als Hauptkriterium den ersten Summanden nehmen und als Nebenkriterium die Anzahl der Summanden (diagonale Lesart) oder andersherum als Hauptkriterium die Anzahl der Summanden (spaltenweise Lesart). Prinzipiell ist auch die Sortierung nach Ergebnissen denkbar, aber eine Begründung der Vollständigkeit ist dann nur schwer möglich, wenn die Summen nicht tabellarisch angeordnet werden.

3 KONSEQUENZEN FÜR DIE PLANUNG DES UNTERRICHTS

Unsere hier in aller Kürze vorgestellte Interviewstudie (ausführlicher in Schwätzer & Selter 1998) hatte von Anfang an zwei Ziele:

1. Sie sollte Erkenntnisse darüber liefern, wie sich Kinder mit dem Problemkontext auseinandersetzen. Es ging uns also primär um *aufgabenbezogene* Kenntnisse, wenngleich wir vermuten, daß manche Beobachtungen auch auf andere Aufgabenkontexte übertragbar sind.

2. Die Interviewstudie sollte des weiteren dazu dienen, aus den durch sie zu sammelnden Erkenntnissen die Konstruktion einer Unterrichtsreihe zu ermöglichen (vgl. Schwätzer 1999). Es genügte für unseren Ansatz, Vorgehensweisen und Muster einer einzigen vierten Klasse zu erkunden, die als mögliche

potentielle Denk- und Vorgehensweisen von Viertkläßlern Eingang in unsere Überlegungen gefunden haben.

Welche Konsequenzen ergaben sich nun u. E. für die Planung des Unterrichts?

- Es ist mit Blick auf Kompetenz und Motivation der Schüler u. E. kein Wagnis, die Aufgabenstellung bereits in einem vierten Schuljahr zu behandeln. Allerdings war der Zeitbedarf der einzelnen Gruppen in den Interviews recht unterschiedlich, so daß den Schülern für die Behandlung hinreichend viel Zeit eingeräumt werden sollte. Sinnvoll ist es u. E. beispielsweise, die Aufgabe ab Sequenz 2 (s. u.) zunächst einmal im Rahmen offener Unterrichtsphasen (z. B. Wochenplan) bearbeiten zu lassen.

- Auf den ersten Blick wirkten die Aktionen einiger Schüler zu Beginn des Interviews wie zufälliges Herumprobieren. Was wirr und konfus erscheint, erwies sich bei genauerem Hinsehen jedoch als durchaus von einer gewissen (nicht unbedingt für andere direkt erkennbaren) Systematik gelenkt. Für den Unterricht hat das u. E. die Konsequenz, die Schüler ihre eigenen Denkwege gehen zu lassen und ihr Vorgehen prinzipiell immer als vernunftgeleitet anzusehen – auch wenn es nicht so zu sein scheint.

- In fast allen Interviews wurden verschiedene Strategien unterschiedlichen Niveaus entwickelt, um weitere Summen zu finden. Diese Vielfalt ist insbesondere vor dem Hintergrund überraschend, daß Erwachsene nach unseren Erfahrungen häufig mit einer einzigen Methode zum Ziel zu kommen versuchen. Nach einer gewissen Zeit setzte sich in den Zweiergruppen häufig jeweils eine Hauptstrategie durch. Diese muß wohl zunächst im Individuum erst reifen. Zudem muß auch in der Zweiergruppe erst ein gemeinsam geteiltes Verständnis entstehen. Mit Blick auf den Unterricht wäre es daher u. E. schädlich, eine Systematik vorzugeben oder diese den Kindern durch methodische Kniffe mehr oder weniger geschickt nahe zu legen. So würde die Strategienvielfalt der Schüler im Keim erstickt. Das betrifft insbesondere diejenigen Momente, in denen bei den Kindern noch kein Bedürfnis nach Strukturen zu bestehen scheint oder sie zwischen verschiedenen Vorgehensweisen ‚hin- und herspringen'.

- Es wurde des weiteren deutlich, daß die Lehrperson auch dann nicht überflüssig ist, wenn man Schülern Raum und Zeit zum Gehen eigener Wege gibt. So waren zum Ende der Produktionsphase die meisten Gruppen der Meinung, es gebe keine weiteren Summen mehr und sahen (verständlicherweise) keine Notwendigkeit zu weiteren Begründungen („Es gibt keine mehr, weil wir keine mehr finden."). So etwas wie ein ‚Beweisbedürfnis' muß sich anscheinend zunächst entwickeln. Genau hier war die Frage des Interviewers von zentraler Bedeutung, wie man zeigen könne, daß es sich um alle Möglichkeiten handelte, die in zwei Fällen durch den verbalen Impuls des Ordnens ergänzt wurde. In einem Unterricht, in dem die Schüler nicht einem individuellen Arbeitsblatt-Akkord verpflichtet sind, sondern auch selbst Phasen des Lernens von- und miteinander gestalten können, ist es nicht unwahrscheinlich, daß dieser Denkanstoß auch innerhalb einer Gruppe gegeben und nicht vom Lehrer eingespeist werden muß.

Diese vier Haupterkenntnisse und die im 2. Kapitel beschriebenen Strategien der Schüler im Hinterkopf, haben wir in Analogie zu den Phasen der Interviews vier Unterrichtssequenzen (keine „Stunden", da wir einen flexiblen Zeitrahmen andeuten möchten) entworfen:

– *1. Sequenz*: Einführung der „Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen" anhand von vorgegebenen und selbsterfundenen Beispielen

– *2. Sequenz*: Auseinandersetzung mit dem Problem, möglichst viele dieser Aufgaben mit Ergebnissen nicht größer als 25 zu finden.

– *3. Sequenz*: Begründung der Vollständigkeit der gefundenen Lösungen durch Ordnen und Argumentieren anhand der ggf. ergänzten Aufgabenserien.

– *4. Sequenz*: Reflexion der Erkenntnisse über „Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen" durch die schriftliche Darstellung einer Vollständigkeitsbegründung bzw. des eigenen Lernprozesses.

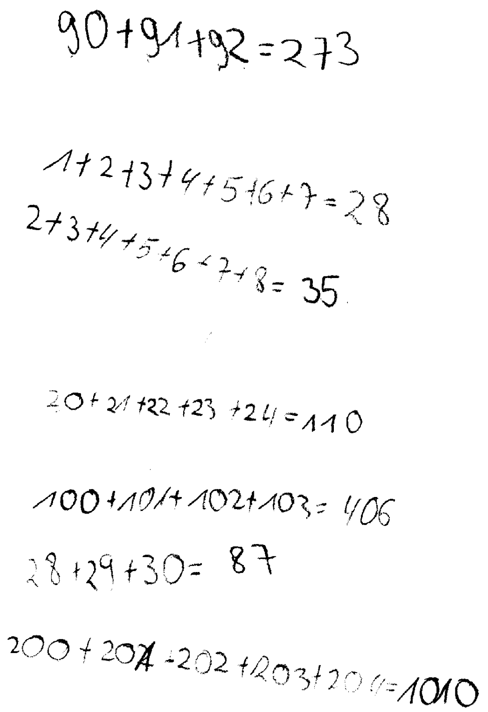
4 ERFAHRUNGEN

Die Unterrichtsreihe wurde zwar in einem 4. Schuljahr erprobt; entsprechende kleinere Modifikationen vorausgesetzt, ist sie unseres Erachtens durchaus noch bis zum 6. Schuljahr einsetzbar. Die wichtigsten

Erfahrungen, die wir bei der reflektierten unterrichtlichen Erprobung sammeln konnten, wollen wir im folgenden anführen.

1. SEQUENZ

In dieser Unterrichtssequenz sollten die Kinder das Aufgabenformat der „Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen“ kennenlernen. Die Kinder identifizierten zunächst aus 5 Beispielen richtige und falsche Aufgaben mit Reihenfolgezahlen und demonstrierten das Verständnis der Aufgabenstellung durch Notation einiger „Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen“ auf einem Blatt (Abb. 1).

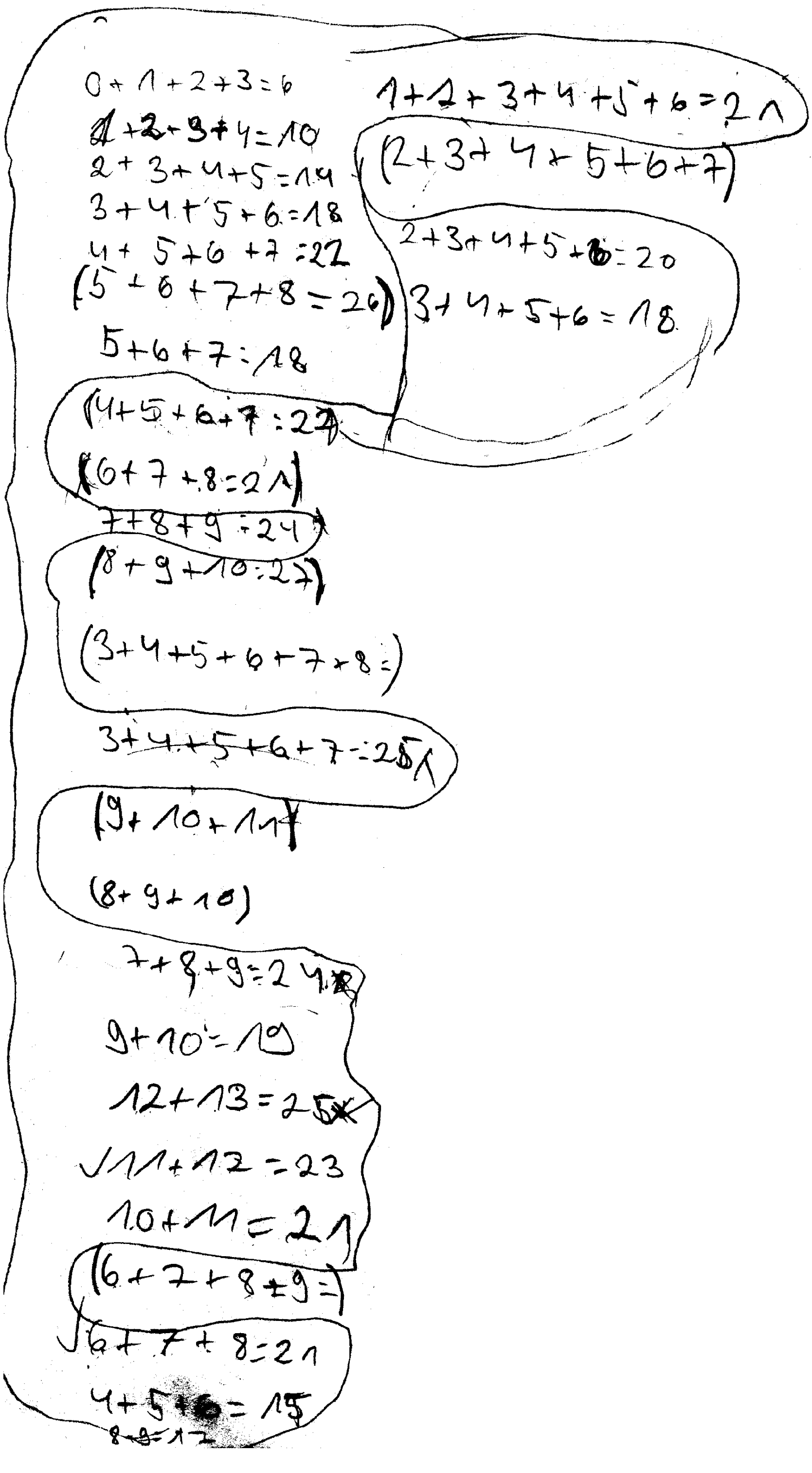


2. SEQUENZ

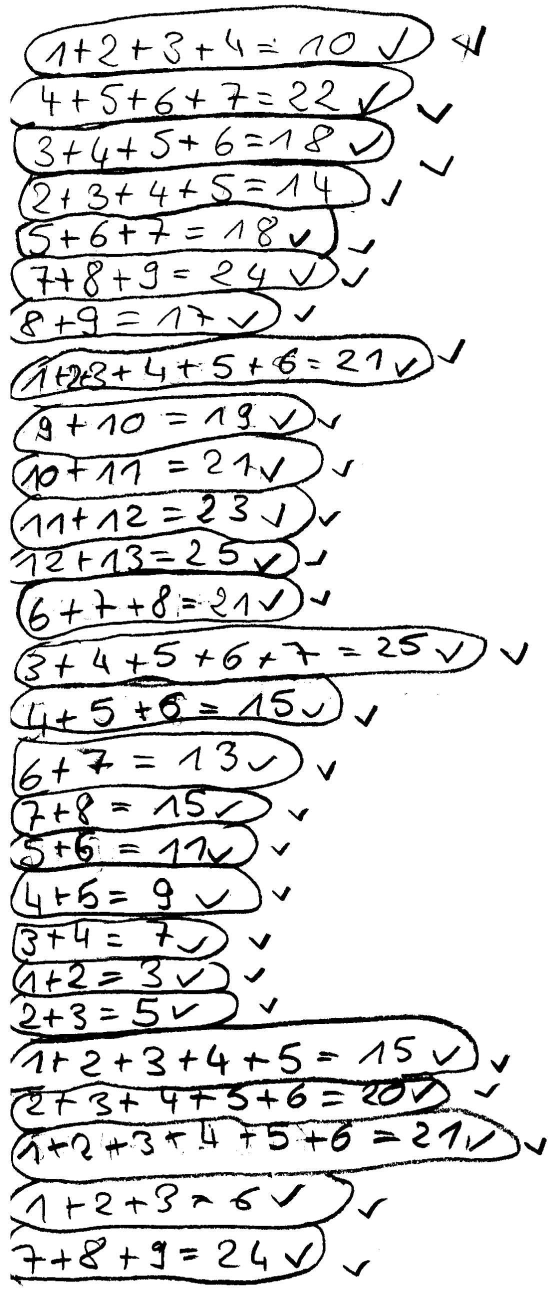
Anschließend wurden die Schüler mit dem eigentlichen Problem konfrontiert, das sie in variabel zu gestaltender Einzel-/Partnerarbeit bearbeiten sollten. Diese Herangehensweise erforderte einige organisatorische Vorarbeiten. Nach den Erfahrungen aus den Interviews war mit einer großen Streubreite der Bearbeitungseffizienz zu rechnen. Einige Kinder würden nur wenige Beispiele finden und relativ schnell reklamieren, sie fänden keine weiteren mehr. Andere Kinder würden kontinuierlich eine Aufgabe nach der anderen produzieren, dabei – wie in den Interviews – wechselnde Strategien entwickeln und so auch manche Aufgaben doppelt und dreifach niederschreiben. Der unterschiedliche Zeitbedarf – in den Interviews fanden sich Bearbeitungszeiten der Produktionsphase von 11 bis über 50 Minuten – wurde durch übergeordnete organisatorische Maßnahmen aufgefangen (Wochenplan).

Zunächst sollten alle Kinder sämtliche Summen niederschreiben, die sie fanden. Am Ende dieser Phase sollten die Kinder in „Rechenkonferenzen“ an Gruppentischen mit zur gleichen Zeit fertig werdenden anderen Zweiergruppen ihre Ergebnisse abgleichen bzw. ergänzen und dabei möglicherweise schon erste Diskussionen über Findestrategien führen.

An einem Beispiel kann die große Ähnlichkeit der Vorgehensweisen im Unterricht und in den Interviews deutlich werden. Joana und Fabian (Abb. 2) produzierten zunächst 4er-Summen mit der Strategie „Alle erhöhen“, bis die 25 überschritten wurde (ausreizen), um dann mittels „Hinten verkürzen“ die nächste 3er-Summe zu finden. Diese wurde wieder mittels „Alle erhöhen“ ausgereizt. Dann knüpften sie an eine bereits gefundene Summe durch „Hinten anhängen“ an, bis sie an die Grenze 25 stießen.



Nach zwei Versuchen mit 3+4+5+6+7+8 und 3+4+5+6+7 („hinten verkürzen"), nehmen sie wieder Dreiersummen, bei denen sie mit „alle vermindern" von 9+10+11 über 8+9+10 zu 7+8+9 gelangen. Diese Strategie läßt sich auch bei den weiteren Zweier- und Dreiersummen beobachten. Die Ergebnisse rechts oben dürften aus denen links durch „hinten verlängern", „alle erhöhen" (mit zu großen Resultaten), „hinten verkürzen" oder „hinten verlängern" der linken Aufgabe und „vorne verkürzen" entstanden sein. Insgesamt lassen sich alle in den Interviews gefundenen Vorgehensweisen in den Eigenproduktionen der Kinder finden bzw. zumindest vermuten (vgl. Abb. 3).



In der sich anschließenden „Rechenkonferenz“ sahen sich Joana und Fabian, die bis dahin immerhin 19 der 27 Möglichkeiten gefunden hatten, nun mit den ebenfalls 19 - aber divergierenden - Möglichkeiten Julias und Jennifers konfrontiert. Der zunächst scheiternde Versuch, gleiche Ergebnisse auf den einzelnen Arbeitsblättern abzuhaken, führte spontan dazu, die Ergebnisse sortiert abzuschreiben (Abb. 4), auch wenn die Sortierung noch unvollkommen blieb (einige Ergebnisse sind doppelt notiert (z. B. 1+2+3+4), so daß diese 4er-Gruppe am Ende glaubte, es gäbe 31 Möglichkeiten.

1+2=3

2+3=5

3+4=7

4+5=9

5+6=11

6+7=13

7+8=15

8+9=17

9+10=19

10+11=21

11+12=23

12+13=25

1+2+3=6

3+4+5=12

5+6+7=18

7+8+9=24

1+2+3+4=16

4+5+6+7=22

1+2+3+4=10.

2+3+4+5=14.

3+4+5+6=18.

4+5+6+7=22.

5+6+7=18.

7+8+9=24.

3+4+5+6+7=25.

7+8+9=24.

6+7+8=21.

4+5+6=15.

1+2+3+4+5+6=21

2+3+4+5+6=20.

3+4+5+6=18.

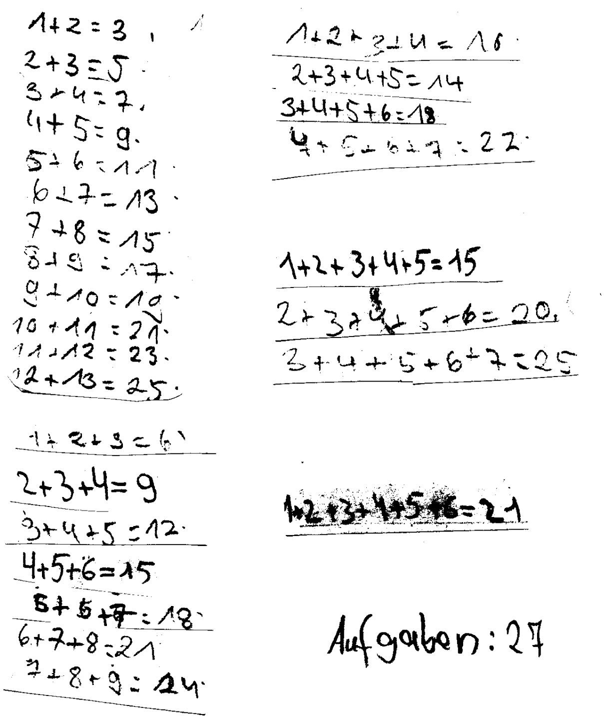
Nachdem alle Gruppen ihre Rechenkonferenzen beendet hatten, hätte man eine Frontalphase zur Ergebnissammlung an der Tafel und zur Diskussion der Vollständigkeit durchführen können. Wir hatten uns bei der Konstruktion der Unterrichtsreihe dafür entschieden, die „Rechenkonferenzen" bereits als Reflexionsphase dieser Unterrichtssequenz anzusehen und die Eigenproduktionen einsammeln zu lassen.

3. SEQUENZ

In dieser Sequenz ging es – wiederum analog zu den Interviewphasen – um die Begründung der Vollständigkeit der gefundenen Lösungen. Zunächst stellte die Lehrperson aus den teilweise auf Folie kopierten Eigenproduktionen die verschiedene Anzahlen gefundener Möglichkeiten vor, um darauf hin zu fragen, welche Anzahl denn nun die richtige sei.

Die Kinder, die sich zum Ende der vorangegangenen Sequenz zu einer Rechenkonferenzen zusammengefunden haben, sollten nun unter Berücksichtigung ihrer wieder ausgeteilten Eigenproduktionen gemeinsam ein Dokument erstellen, in dem sie durch Ordnen – dieser Hinweis allein gibt noch keine Ordnungsmethode vor – die Vollständigkeit ihrer gefundenen Lösungen begründen. „Ordnen“ kann hier wiederum analog zu den Interviews sowohl das geordnete Abschreiben der gefundenen Ergebnisse bzw. deren Ausschneiden und geordnetes Aufkleben heißen.

Die Gruppe um Joana (Abb. 5) beispielsweise zerschnitt dazu eine Kopie ihres gemeinsam in der Rechenkonferenz der Vorstunde erstellten Ergebnisblattes, ordnete die Ergebnisse nach Anzahl der Summanden als Hauptkriterium sortiert an, eliminierte doppelte, ergänzte noch fehlende Lösungen und gelangte so schließlich zu der Auffassung, daß es nur ihre 27 gefundenen Möglichkeiten gab.



1+2=3
2+3=5
3+4=7
4+5=9
5+6=11
6+7=13
7+8=15
8+9=17
9+10=19
10+11=21
11+12=23
12+13=25

1+2+3=6
2+3+4=9
3+4+5=12
4+5+6=15
5+6+7=18
6+7+8=21
7+8+9=24

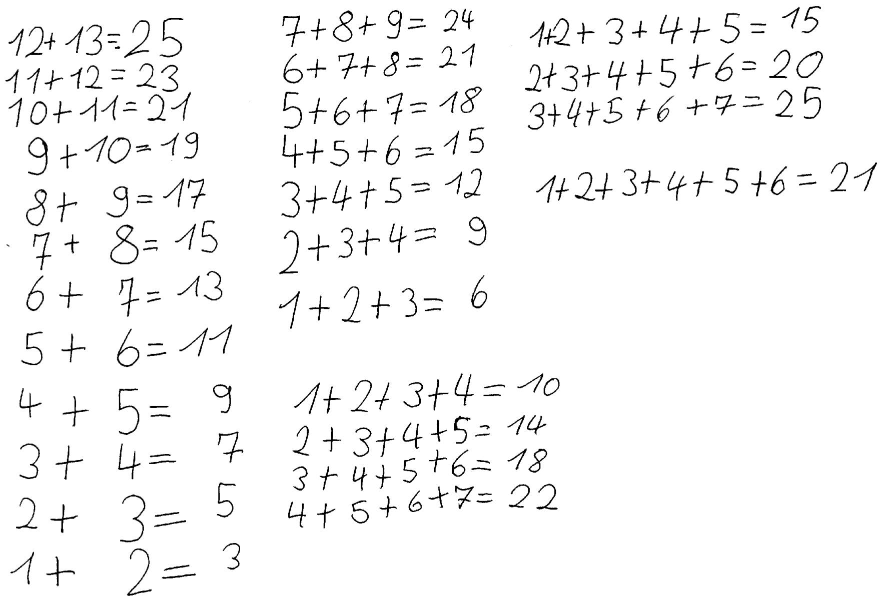
1+2+3+4=10
2+3+4+5=14
3+4+5+6=18
4+5+6+7=22

1+2+3+4+5=15
2+3+4+5+6=20
3+4+5+6+7=25

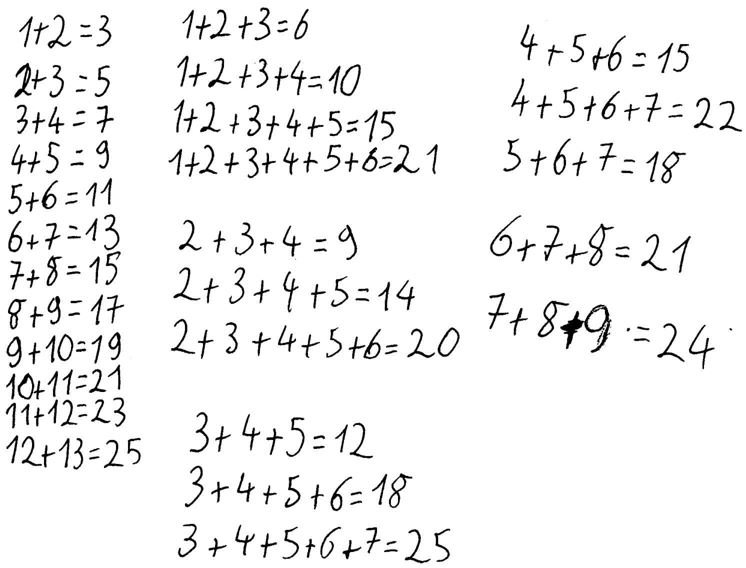
1+2+3+4+5+6=21

Aufgaben: 27

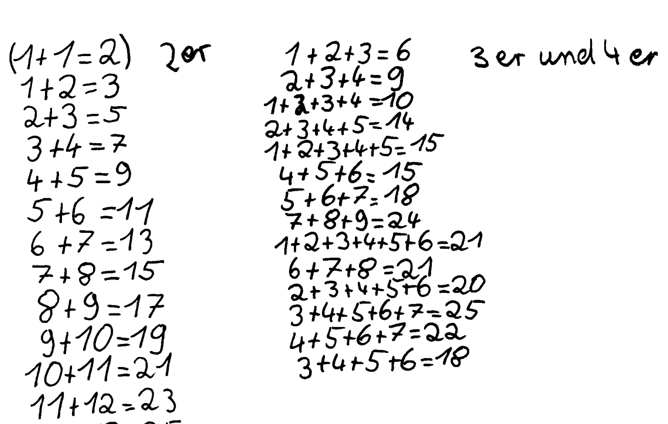
Dass auch in dieser Sequenz noch viele individuelle Lösungswege existierten, zeigt ein Vergleich der restlichen Dokumente: Rubens Gruppe ging auf die gleiche Weise wie Joana & Co vor, notierte aber die 2er-Summen rückwärts und hätte fast die 4er-Summen vergessen (Abb. 6).



Auch Christophers Gruppe begann ähnlich, wechselte jedoch nach den 2er-Summen das Hauptsortierkriterium auf die Strategie „Erster Summand“ (Abb. 7).



Lediglich Hannah & Co. gelang es nicht, eine geeignete Sortierstrategie zu finden, da sie in der Spalte „3er und 4er“ zwischen den zwei Hauptsortierkriterien hin und her sprangen. Dadurch vergaßen sie eine Möglichkeit und fanden nur 26 (Abb. 8).



Am Ende dieser Sequenz sollten die Gruppen anhand ihres gemeinsam erstellten Dokuments die anderen Kinder von der Richtigkeit ihrer Überlegungen überzeugen. Hierzu wurde ihr Gruppendokument rasch auf eine Tageslichtschreiberfolie kopiert, und die Schüler argumentierten, warum sie der Auffassung seien, daß die Anzahl ihrer gefundenen Lösungen die richtige sei. Hannah & Co. gelang es im übrigen noch während der Präsentation, ihre Sortierung - allerdings an der Tafel - umzustellen und die fehlende Aufgabe zu finden.

4. SEQUENZ

Für das Ende von Unterrichtsreihen sehen wir es generell als sinnvoll an – gerade auch, wenn viel in Gruppen gearbeitet wurde – eine individuelle Rückschau auf den Lernprozeß vorzunehmen. Zu diesem Zweck sollten die Kinder einen Text zu einer der beiden folgenden Fragestellungen verfassen: „Wie viele Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen mit Ergebnis nicht größer als 25 gibt es?“ oder „Was ich über Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen gelernt habe.“

Bei der Betrachtung der folgenden Beispiele ist zu bedenken, daß die Kinder vermutlich über mehr Erkenntnisse verfügten, als sie zu Papier brachten. Solche schriftlichen Begründungen brachten sie in dieser Einheit erstmalig zu Papier (Abb. 9 bis 11).

Wie viele Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen mit Ergebnis nicht größer als 25 es gibt.

Es gibt 27 Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen mit dem Ergebnis nicht größer als 25. Man bekommt es heraus, wenn man es selber ausprobiert. Man nimmt sich ein Blatt Papier und und schreibt die Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen nach der Größe sortiert auf (1+2+3=6. 2+3+4=9 usw.). Aber dran denken: Das Ergebnis darf nicht größer als 25 sein! Das Sortieren geht so: zuerst sortiert man die Zweieraufgaben z.B. 1+2=3. nach der Größe wenn man bei 13+14 angekommen ist, dann sortiert man die Dreieraufgaben und die vierer- usw. So bekommt man 27 Aufgaben heraus

Fertig

Wie viele Plusaufgaben mit Reihefolgezahlen mit Ergebnis nicht größer als 25 es gibt.

Es gibt 27 Aufgaben Reihefolgezahlen, die unter 25 oder genau 25. Weil ... wenn man mit 2er Aufgaben anfengt und dann die 3er und dann die 4er und imner so weiter bis es nicht mehr geht.

12+13=25
1+2+3= 6
1+2+3+4=10
3+4+5+6+7=28
1+2+3+4+5+6=21
Das geht alles!

13+14=27
12+13+14=39
10+11+12+13=46
Das geht nicht alles!

Wie viele Plusaufgaben mit Reihenfolgenzahlen mit Ergebnis nicht größer als 25 es gibt.

Es gibt 27 Reihenfolgezahlen, ~~m~~ die höchstens 25 ergeben. Weil wenn eine Zahl mehr ist, ist das Ergebnis höher als 25.

1+2+3+4+5+6=21
Das geht

1+2+3+4+5+6+7=28
Das geht nicht

Man muss das bei jeden zahlen machen.
~~1+2=3~~ 1+2=3 1+2+3=6 1+2+3+4=10 1+2+3+4+5=15
~~2+3=4~~

1+2+3+4+5+6=21

5 SCHLUßBEMERKUNG

Die Erkenntnisse, die wir durch die Interviews gewonnen haben, haben in die Konstruktion der Unterrichtsreihe Eingang gefunden. Nach der Erprobung in der Praxis hat sich die Parallelität der Vorgehensweisen zu den Interviews bewahrheitet. Zum einen zeigten sich die gleichen Produktionsstrategien wie in den Interviews und auch ein ähnliches, nur scheinbar ungeordnetes Vorgehen bei der ersten Produktion von Lösungen. Zum anderen entwickelten die Kinder die gleichen Begründungsstrategien wie in den Interviews und fanden selbst eine Systematik der Darstellung der Vollständigkeit. Die schriftlichen Begründungen zeigen, daß die meisten Kinder den Sachverhalt zu Genüge durchdrungen hatten.

Wir denken, daß solche inhaltsbezogene Interviewstudien bzw. Unterrichtsversuche einen wichtigen Zweig der mathematikdidaktischen Forschung darstellen sollten. Wir erheben mit unserem Vorhaben natürlich keinen Anspruch auf Repräsentativität. Dazu sind Kinder und Lehrer viel zu unterschiedlich. Aber wir denken, daß die von uns zusammengetragenen Erkenntnisse Lehrerinnen und Lehrern als inhaltsbezogene Hintergrundinformationen für die Planung, Durchführung und Reflexion des eigenen Unterrichts dienen können.

Literatur

SCHWÄTZER, Ulrich und Christoph SELTER (1998): Summen von Reihenfolgezahlen - Vorgehensweisen von Viertkläßlern bei einer arithmetisch substantiellen Aufgabenstellung. In: Journal für Mathematikdidaktik 19, H. 2/3, S. 123-148.

SCHWÄTZER, Ulrich (1999): Konstruktion von Lernumgebungen auf der Grundlage qualitativer Forschung. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Hildesheim: Franzbecker.