

Thema: „Mathematik als die Wissenschaft von den Mustern - Entdecken, Erforschen und Erklären am Beispiel des Aufgabenformats „Zahlengitter“

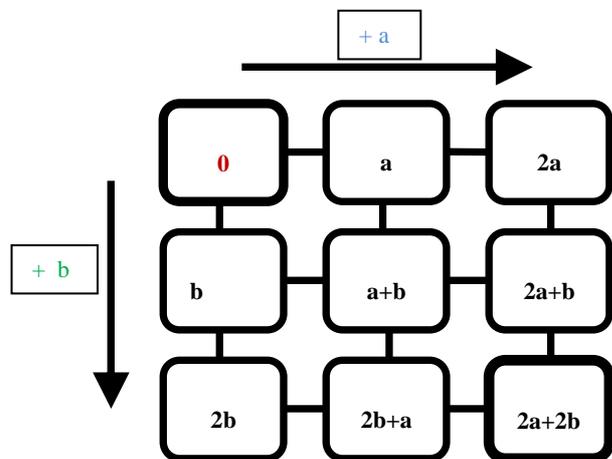
Zeitpunkt: ab Anfang 3. Schuljahr
bis Ende 4. Schuljahr
zeitlicher Umfang: circa 30 Minuten
Material: Zahlengittervorlagen (vgl. Anhang)

Hintergrundwissen:

Das Entdecken, Erforschen und Erklären von Mustern ist die zentrale Tätigkeit in der Mathematik (vgl. KMK 2005; MSW NRW 2008). Dieses Bild von Mathematik sollte den Kindern auch vermittelt werden. Zahlengitter (vgl. de Moor 1980, S. 61ff.) bieten Kindern dazu die Möglichkeit: Muster und Zusammenhänge zu entdecken, Vermutungen zu entwickeln, zu beschreiben, und schließlich auch zu begründen. Das Zahlengitter besteht aus einer quadratischen Anordnung von Kästchen deren Inhalte nach folgender Aufgabenvorschrift miteinander verknüpft werden (vgl. de Moor 1980, S. 66ff.; Selter 2004a; Selter 2004b):

In das **linke obere** Feld wird die **Startzahl** eingetragen. Das Zahlengitter wird vervollständigt, indem nach rechts jeweils die **obere Pluszahl** (a) und nach unten jeweils die **linke Pluszahl** (b) addiert wird (vgl. Abb.). Bei der Gestaltung des Zahlengitters können die Startzahl und die Pluszahlen variiert werden. Dabei ist es möglich gleiche oder verschiedene Zahlen ebenso wie die 0 zu verwenden. Um Muster und Zusammenhänge besser erklären zu können wird die rechte untere Zahl als Zielzahl und die Zahl in der Mitte des Zahlengitters als Mittelzahl bezeichnet.

Beim 3x3-Gitter sind eine Reihe von Entdeckungen möglich, die zur Vervollständigung des Zahlengitters hilfreich sind:



- Die Mittelzahl ($a + b$) entspricht der Summe der oberen Pluszahl (a) und der linken Pluszahl (b).
- Ist die Zielzahl des Gitters festgelegt und variieren die Pluszahlen, so bleibt die Mittelzahl gleich. Da sie den Wert ($a + b$) hat, ist sie damit halb so groß wie die Zielzahl mit dem Wert $2(a + b)$.
- Der Zielstein, der linke untere und rechte obere Randstein sind immer gerade. Begründung: Diese Steine beinhalten den Faktor zwei [$2(a +$

$b)$, $2a$, $2b$].

- Die Diagonalensummen des Gitters sind immer durch 3 teilbar, wenn die Startzahl 0 ist. Begründung: Die Diagonalen ergeben $(2a) + (a + b) + (2b) = 3a + 3b = 3(a + b)$; $(a + b) + (2a + 2b) = 3a + 3b = 3(a + b)$.

Allgemeine Hinweise

Bei Zahlengittern handelt es sich bereits um ein relativ komplexes Zahlenmuster dessen Struktur zunächst verstanden werden muss. Es ist daher notwendig festzustellen, ob dem Kind das Aufgabenformat bereits bekannt ist, dazu dient Thema 1. Falls den Kindern das Aufgabenformat Zahlengitter noch nicht bekannt ist, sollten zunächst einige ausgefüllte Zahlengitter betrachtet und anschließend eigene ausgerechnet werden. Zeigt man den Kindern z.B. ein Zahlengitter mit Startzahl 0 und vorgegebenen Pluszahlen, dann kann es



passieren, dass die Kinder hier andere Rechenvorschriften erfinden, was im weiteren Verlauf des Interviews zu Problemen führen kann.

Eine Kenntnis der o.g. Begriffe (Startzahl, Mittelzahl, etc.) ist notwendig, um mögliche Entdeckungen beschreiben zu können. Sobald dem Kind die wesentlichen Begriffe bekannt sind und es den Aufbau des Zahlengitters verstanden hat kann zu Thema 2 übergegangen werden. Stellt sich bei der Einführung heraus, dass das Kind bereits sicher im Umgang mit dem Aufgabenformat ist, so kann bereits mit Thema 2 begonnen werden.

Thema 1: Einführung des Aufgabenformates

Aufgabe	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
Vervollständige das Zahlengitter: Probegitter 1: Startzahl 0 und verschiedene Pluszahlen (4, 8)	Möglicher Einstieg: Dem Kind wird ein (handschriftlich) vollständig ausgefülltes Zahlengitter vorgelegt. „Hast du so eine Aufgabe schon einmal gesehen? Ein anderes Kind hat dieses Zahlengitter schon ausgerechnet. Kannst du mir erklären, wie das Kind das Zahlengitter vervollständigt hat? Wie hat das Kind die einzelnen Felder gefüllt?“ Das Kind soll die Bildungsregel also selbst entdecken. Hierbei können auch schon die Begriffe Startzahl, Pluszahl und Zielzahl thematisiert werden. Alternative: Die Pluszahlen, Start- und Zielzahl und ggf. ein paar weitere Zahlen werden vorgegeben. Das Kind erhält den Auftrag herauszubekommen, wie es die noch leeren Felder füllen kann. Anschließend rechnet das Kind weitere Zahlengitter. Dabei bleibt die Startzahl 0. Die Pluszahlen werden variiert. Auch kann man das Kind nach ein paar erfolgreichen Versuchen eigene Pluszahlen wählen lassen.
Weitere Alternative (nicht zwingend notwendig): Zahlengitter 2: Startzahl 2 und gleiche Pluszahlen: 6	Mögl. Schwierigkeit: Die Startzahl ist nicht Null sie muss bei der Berechnung mit beachtet werden
Weitere Alternative (nicht zwingend notwendig): Zahlengitter 3: Startzahl 0, linke Pluszahl 9, Mittelzahl 13	Mögl. Schwierigkeit: Die obere Pluszahl fehlt. Sie kann durch Subtraktion der linken Pluszahl von der Mittelzahl errechnet werden
Weitere Alternative (nicht zwingend notwendig): Zahlengitter 4: Startzahl 2, linke Pluszahl 5, Zielzahl 18	Die obere Pluszahl fehlt sie kann bspw. durch Subtraktion des Zielsteinvorgängers von der Zielzahl errechnet werden



Thema 2: Zahlengitter zu geraden Zielzahl – Finde alle Zahlengitter zur Zielzahl x

Eine interessante Aufgabe stellt die Suche nach möglichen Zahlengittern zu einer vorgegebenen Zielzahl dar. Dabei sind einige **Vorgehensweisen und Strategien der Kinder** häufig zu beobachten (vgl. Selzer 2004a; Selzer 2004b):

- unsystematisch oder unsystematisch erscheinendes Probieren (Kinder setzen wahllos Zahlen in die einzelnen Kästchen ein und kommen zu keinem Ziel).
- Strategisches Annähern von oben nach unten (Das Pluszahlpaar 4-9 passt nicht, die Zielzahl ist um 4 zu groß, verringern eines oder beider Summanden solange bis die Zielzahl erreicht ist).
- Ableiten einer Pluszahl von seinem Tauschpaar (Das Pluszahlpaar 3-7 ist bekannt, daraus wird 7-3 abgeleitet)
- Zerlegen der Mittelzahl 10 in zwei Summanden, die dann als Pluszahlen dienen (10 wird zerlegt in 5-5 oder 2-8, usw.)
- Operatives Variieren der Pluszahlen (Das Pluszahlenpaar 2-8 ist bekannt daraus werden 3-7,4-6 usw. abgeleitet indem der eine Summand um 1 erhöht der andere um 1 verringert wird)

Aufgabe Startzahl 0 & Zielzahl 20	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
1. Wie viele Zahlengitter findest du?	<p>Es gibt 11 verschiedene Lösungen (mögl. Pluszahlen 0-10, 1-9, 2-8, 3-7, 4-6, 5-5, 6-4, 7-3, 8-2, 9-1, 10-0)</p> <p>Mögliche Impulse, wenn das Kind <i>keine</i> Strategien nutzt, um Lösungen zu finden und nicht mehr weiter weiß.</p> <ul style="list-style-type: none">• Du hast ja schon ein paar Zahlengitter mit der Zielzahl 20 gefunden (alle anderen weglegen). Fällt dir an denen etwas auf?• Was musst du machen damit die Zielzahl größer oder kleiner wird? <p>Mögliche Zwischenfragen, wenn das Kind <i>einige</i> Lösungen findet:</p> <ul style="list-style-type: none">• Warum hast du jetzt diese beiden Pluszahlen ausgesucht?• Warum hast du das durchgestrichen?• Was ist dir aufgefallen? <p>Achtung: Es kann passieren, dass den Kindern nicht bewusst ist, dass Tauschpaare als neue Möglichkeit zählen und dass die Null als Pluszahl zugelassen ist. Das ist natürlich eine Konvention! Daher sollte in solchen Fällen behutsam interveniert werden: „Okay, jetzt hast du schon ganz viele Lösungen gefunden. Kann es denn noch weitere geben? ... Was ist, wenn du auch die Null als Pluszahl benutzen darfst. ... Was ist, wenn du die Pluszahlen auch tauschen darfst. ...“</p>
2. Sind das alle Lösungen?	<p>Gibt es wohl noch weitere Lösungen? Warum bist du dir sicher, dass du jetzt alle gefunden hast?</p> <p>Findet das Kind keine weiteren Lösungen, dann weiter zu 3.</p>
3. Warum sind das alle?	Mögliche Antworten:



	<p>a) <i>Unstrategische</i> Begründungen der Kinder: „Weil ich keine mehr gefunden habe!“ „Weil mir nichts mehr einfällt.“ „Weil das alle sind!“</p> <p>In diesem Fall weiter zu 4.</p> <p>b) <i>Begründungen, die das strategische Vorgehen</i> nutzen. Dabei werden häufig folgende Strukturen von den Kindern erkannt und genutzt:</p> <ul style="list-style-type: none">• Als Mittelzahl kommt immer die 10 heraus• Die Pluszahlen sind zusammen immer 10• Wenn die linke Pluszahl um 1 größer wird die obere Pluszahl um 1 kleiner• Rechts oben bzw. links unten bzw. rechts unten steht immer eine gerade Zahl• Die rechte und die untere Mittelzahl sind zusammen immer 30• Bei der Zielzahl 20 sind es immer 30, wenn man die Zahlen von links oben nach rechts unten (oder von rechts oben nach links unten) zusammenzählt <p>Machen die Kinder derartige Entdeckungen, dann sollte man vorsichtig danach fragen, ob sie erklären können, warum das so sein muss (z.B. „Du hast erkannt, dass die Mittelzahl immer 10 ist. Da hast du recht. Aber warum ist das so?“)</p>
4. Was fällt dir bei den Zahlengittern auf?	<p>Bei unstrategischen Antworten sollte das Kind direkt nach Mustern in den Zahlengittern gefragt werden. Die folgenden Fragen können als Impulse dienen:</p> <ul style="list-style-type: none">• Kannst du die Zahlengitter ordnen/ sortieren? (z.B. nach Paar- & Tauschpaar,) Was fällt dir dabei auf?• Vergleiche die Mittelzahl mit der Start- / Zielzahl. Was fällt dir auf?(dazu auch auf die einzelnen Zahlen zeigen damit dem Kind klar ist, welche Zahlen gemeint sind.• Sieh dir einmal die linke Pluszahl an, wenn die nun 1 (2,3,..) größer wäre, wie groß ist dann die andere Pluszahl?



Thema 3: Zahlengitter zu ungeraden Zielzahlen oder: Was passt nicht?

Das Lösen von Zahlengittern mit ungerader Zielzahl stellt einen besonderen Reiz dar, da wie bereits erwähnt im 3*3 Zahlengitter die Mittelzahl genau der Hälfte des Zielsteins entspricht. Dadurch können die Kinder darauf kommen, dass es **keine mögliche Lösung** gibt bzw. dass es nur **eine Bruch- oder Dezimalzahllösung** gibt. Beide Lösungen sollten akzeptiert werden.

Aufgabe	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
Finde auch zur Zielzahl 25 alle möglichen Zahlengitter	<p>Zu dieser Aufgabe gibt es keine ganzzahligen Lösungen. Es ist jedoch durchaus möglich, dass einige Kinder mit Brüchen oder Dezimalzahlen zu sinnvollen Lösungen kommen.</p> <p>Sinnvolle Fragen: Was fällt dir auf? Warum gibt es keine Lösung?</p> <p>Wie kann man denn die Mittelzahl herausbekommen?</p>
Welche Zahlen kann man als Zielzahlen erreichen? Welche nicht?	

Literatur:

KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Wolters-Kluwer, Luchterhand Verlag. Verfügbar unter: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (Abruf am: 13.07.2011)

Moor, Ed de (1980): Wiskobas bulletin. Leerplanpublikatie 11. Utrecht: IOWO.

Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW (Hrsg.) (2008): Lehrplan Mathematik für die Grundschulen des Landes NRW. Verfügbar unter: http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/grundschule/grs_faecher.pdf (Abruf am: 13.07.2011)

Selter, Ch. (2004a): Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. Basispapier zum Modul 2: Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule. Verfügbar unter: <http://www.sinus-grundschule.de/fileadmin/Materialien/Modul2.pdf> (Abruf am: 05.07.2011)

Selter, Ch. (2004b). Zahlengitter – eine Ausgangsaufgabe, viele Variationen. Die Grundschulzeitschrift, H. 177, S. 42-45.

