4 Analyse von Dokumenten

Das Studium von Erfahrungsberichten über das mathematische Denken von Grundschulkindern (vgl. Kap. 2 und 3) kann einen wesentlichen Beitrag dazu leisten zu lernen, wie Kinder rechnen. Eine kritische Auseinandersetzung mit den Erfahrungen, die andere Personen gemacht haben, sollte u. E. jedoch unbedingt durch die Erfahrungen ergänzt werden, die man selbst sammelt.

Hierbei kann es sich zum einen um Primärerfahrungen handeln, indem man selbst Erkundungsprojekte durchführt (vgl. Kap. 5). In diesem Kapitel wollen wir zunächst Gelegenheiten bieten, Sekundärerfahrungen zu sammeln, indem Dokumente analysiert werden, die beim Mathematiktreiben von Grundschulkindern entstanden sind.

4.1 Dokumente

Zur Analyse werden drei Formen von Dokumenten verwendet: Episoden, in denen Begebenheiten aus dem Unterricht oder aus dem Alltag beschrieben werden, Transkripte von Unterrichts- oder Interviewsequenzen sowie Eigenproduktionen aus dem Unterricht bzw. aus Interviews. Die Dokumente werden jeweils mit Kontextinformationen sowie mit einer Reihe von Denkanstößen versehen. Zu Methoden der Interpretation von Transkripten verweisen wir auf Beck & Maier (1994). Hilfreiche Hintergrundinformationen zur Bearbeitung der Impulse und zur Beantwortung der Fragestellungen werden in Kap. 4.2 gegeben.

Wir haben aus Platzgründen darauf verzichtet, in jedem Dokument darauf hinzuweisen, dass in Transkripten die Schüleräußerungen jeweils fett und die der Interviewer jeweils kursiv gedruckt sind. Interviewer werden mit I abgekürzt; Pausen sind durch drei Auslassungspunkte (...) gekennzeichnet, längere Pausen werden mit Angabe ihrer Dauer angegeben. Abgebrochene Worte enden mit einem waagerechten Strich (z.B. zwanz- bei zwanzig).

Die ProSieben

Eines Tages besuchte meine Frau und mich eine gute Bekannte mit ihrem Töchterchen Daniela (4). Daniela hat sich irgendwie angewöhnt, wenn sie zu uns kommt, als erstes nach Malblock und Stiften zu fragen. Dann malt sie uns ein Bild, das wir in der Küche aufhängen müssen. Während sie nun da sitzt und malt, unterhalten wir uns über ihre Lieblingsfarbe (rosa). Ich frage sie, ob sie denn auch schon eine Lieblingszahl hat. „Jaaah!", sagt sie sofort, „die ProSieben!" Ich bin platt. „Die kenne ich gar nicht, die Zahl, wie sieht die denn aus? Kannst du mir die mal aufmalen?" „Klar", sagt ihre Mama, „glotzte doch den ganzen Tag lang acht Stunden drauf, ne?" Daniela malt daraufhin Folgendes

und strahlt mich mit breitem, stolzem Grinsen an.

Uli Schwätzer

D 1: Rechenfähigkeit am Ende der Kindergartenzeit und ihre Entwicklung

Nachstehend werden Episoden aus zwei Interviewserien zu Ende der Kindergarten- bzw. zu Beginn der Schulzeit wiedergegeben, mit deren Hilfe erkundet wurde, was und wie Kindergartenkinder schon rechnen können und ob und wie sich ihre Leistungen in der Zwischenzeit ändern.

Zum einen wurden Bildsachaufgaben aus dem Erkundungsprojekt E 1 (Kap. 5.2), zum anderen die sog. Schachtelaufgaben (vgl. Kap. 3.1 sowie E 2 in Kap. 5.2) verwendet. Zur Dokumentation der Entwicklung werden im Folgenden insbesondere solche Aufgaben wiedergegeben, die die Kinder am Ende der Kindergartenzeit noch nicht korrekt gelöst haben. Ausdrücklich sei jedoch vermerkt, dass es sich hierbei um keine repräsentative Auswahl handelt – bei überraschend vielen Aufgaben gaben die Kinder das richtige Ergebnis an.

Es folgen drei Paare von Transkripten, bei denen die Rechenwege der Schüler vor und nach den Sommerferien ausgewählt wurden, sowie eines, in dem die Bearbeitung zweier Aufgaben im Juni-Interview dokumentiert wird.

- Wie ermitteln die Kinder jeweils das Ergebnis?
- Wie unterscheiden sich die Vorgehensweisen in den jeweils zusammengehörigen Interviews?

1. Michael bearbeitet die Bildsachaufgabe 11 – 3

Juni

Jetzt haben wir 11 Leute im Zug, und 3 steigen aus.

... 7.

Mhm, rechnest du mir das vor?

Wenn 11 drin sitzen, sind 10 und noch einer (zeigt erst 10 Finger und noch einen dazu), **dann steigen 3 aus, sind nur noch 7 da** (geht beim Rückwärtszählen mit den Fingern von 10 Fingern aus).

September

Dann stell dir mal 'nen Zug vor, da sitzen 11 Leute drin. Dann hält der Zug und am Bahnhof steigen 3 Leute aus.

3?

Mhm. Wie viel bleiben dann im Zug sitzen?

... hm (12 Sekunden Pause) **8!**

Wie haste das jetzt gemacht?

11, dann steigt der 11., dann der 10. und dann der 9. (zählt mit den Fingern an einer Hand ab). **Dann bleiben 8 drin.**

---

2. Michael bearbeitet die Bildsachaufgabe 50 Pf + 50 Pf + 1 DM + 2 DM

Juni

Direkt zuvor löst er die Bildsachaufgabe 5 DM + 2 DM + 1 DM korrekt.

I legt echtes Geld hin: 50 Pf, 50 Pf, 1 DM, 2 DM

Und das Geld ist da in dem Portemonnaie.

Zusammenrechnen.

Ja. Wenn du das zusammenrechnen kannst, ist das schön.

50 Pfennig und 50 Pfennig sind 90 Pfennig, 90 Pfennig, dann noch 91, 92, 93 (legt erst das 1-DM-Stück, dann das 2-DM-Stück dazu).

93? Guck mal Michael, weißt du, was diese beiden Geldstücke zusammen sind? (legt zwei 50-Pfennig-Stücke hin) *50 Pfennig und 50 Pfennig?*

Hm ... 90 Pfennig.

90 Pfennig? Ja dann rechne doch noch mal weiter.

90 Pfennig, 91 Pfennig – ... 92, 93.

September

I legt das Geld auf den Tisch.

2 Mark, 1 Mark und zwei 50 Pfennige.

Mhm ... Kannst du mir denn auch sagen, wie viel insgesamt in dem Portemonnaie ist?

Hm ... (8 Sekunden Pause) **4 Mark!**

... Mhm. Und woher weißt du das?

50 Pfennig sind 1 Mark, 1 Mark sind 2 Mark und 2 Mark sind 4 Mark (geht mit den Fingern von Geldstück zu Geldstück).

---

3. Angelika bearbeitet die Schachtelaufgabe 18 + 3

Juni

Jetzt haben wir so viel Würfel (legt 18 Würfel hin).

Hups, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 (zählt Würfel einzeln ab). **Jetzt sind's 18.**

(I legt Würfel unter die Schachtel) *So, und die kommen dazu* (legt 3 Würfel hin).

... das sind 3.

Mhm. (legt die 3 Würfel auch unter die Schachtel)

17, 18, sind 18. 18, ... 19, 20 und 30.

September

Prima, jetzt hast du richtig gezählt. So, die legen wir mal wieder unter die Schachtel (legt 18 Würfel unter die Schachtel). *So, wie viel sind das?* (legt 3 Würfel hin)

3.

So, die tun wir jetzt auch unter die Schachtel. Wie viel haben wir wohl jetzt insgesamt?

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (zählt mit den Fingern) **9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ... 19, 20, 21.**

---

4. Timo löst im Juni die Aufgabe 5 + 2 + 1

---

als Bildsachaufgabe (5 DM + 2 DM + 1 DM)

Und das (legt nacheinander 2-DM-, 5-DM- und 1-DM-Stück hin).

Eins und die 5. ... Das ist die 2 (zeigt auf die jeweiligen Geldstücke).

Wie viel ...

... ein

... wie viel Geld ist das? Was ist das? (zeigt auf 2-DM-Stück)

2 Mark.

Und das? (zeigt auf 1-DM-Stück)

Eins.

Und dies? (zeigt auf 5-DM-Stück)

Die 5.

Mhm. Kannst du mir denn auch sagen, wie viel Geld jetzt insgesamt in dem Portemonnaie ist?

3.

als „Rechengeschichte" zu Anzahlen von Personen (5 + 2 + 1) ohne bildliche Unterstützung

Stell dir jetzt mal vor, da ist 'nen Zug, da sitzen 5 Leute drin.

(malt „Zug") **Ja?**

5 sitzen da drin.

(malt 5 Striche in den „Zug")

Dann hält der am ersten Bahnhof und da steigen noch 2 Leute ein.

(malt 2 weitere Striche)

Und am andern Bahnhof steigt noch einer ein.

(malt noch einen Strich)

Wie viel sitzen dann insgesamt im Zug?

(zählt Striche einzeln ab) **8.**

D 2: Zur Entwicklung der Rechenfähigkeit von Angelika

Im Folgenden werden Transkriptausschnitte aus zwei Interviews wiedergegeben, während derer Angelika jeweils dieselben Aufgaben bearbeitete. Das erste Interview wurde zu Ende der Kindergartenzeit, das zweite während der ersten Schulwochen durchgeführt.

Bei den verwendeten Aufgaben handelte es sich um Bildsachaufgaben aus dem Erkundungsprojekt E 1 (vgl. Kap. 5.2) bzw. um Schachtelaufgaben (vgl. Kap. 3.1 bzw. E 2 in Kap. 5.2). Es werden insbesondere solche Aufgaben berücksichtigt, die Angelika während der Kindergartenzeit noch nicht korrekt gelöst hat.

- Welche Rechenwege wählt Angelika bei den einzelnen Aufgaben?
- Welche Unterschiede, welche Gemeinsamkeiten können Sie zwischen den beiden Interviews feststellen?
- Worin liegen Ihres Erachtens die Ursachen von Antworten, die nicht korrekt sind?
- Wie könnten die Mitschüler Angelikas im September die Aufgaben gelöst haben? Geben Sie möglichst konkret verschiedene mögliche Reaktionen an!

1. Bildsachaufgabe
9+3

Juni

9 Leute, hupsala.
Mhm, und 3 steigen zu.
3 steigen zu. 1, 2, 3, 4, 5, (tippt fünfmal nebeneinander mit dem Stift in einer Reihe) **6, 7, 8, 9,** (beginnt eine neue Reihe und tippt viermal nebeneinander, beginnt wieder eine neue Reihe und tippt dreimal auf den Tisch) **12.**

September

Jetzt sollst du dir wieder einen Zug vorstellen, in dem 9 Leute schon sitzen.
Hups.
Und 3 steigen noch ein.
3 steigen noch ein. ... (8 Sekunden Pause) **12.**
Mhm.
Sind das dann.
Und wie hast du dir das gedacht?
Einmal hab ich die 9 nachgezählt und dann hab ich noch mit den Fingern hier unten geklopft, einfach so.

---

2. Bildsachaufgabe
11−3

Juni

So, jetzt sind 11 Personen im Zug –
... huh, ... 11 Personen –
... der Zug kommt zum Bahnsteig und dann steigen 3 Menschen aus
... 3 Menschen –
... und die gehen nach Hause. Mit wie viel Personen fährt der Zug dann weiter?
11, 1, 2, 3, 4, ... 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. ... 9.

September

So, und jetzt sitzen sogar 11 Leute im Zug.
Oh.
Und 3 steigen aus.
(A zählt nacheinander ihre 10 Finger durch, hält kurz inne und zeigt dann wieder nacheinander auf 2 Finger ihrer linken Hand) **8.**

---

3. Bildsachaufgabe
5 DM+2 DM+1 DM

Juni

... Guck mal, ... (legt Geldstücke hin) *das ist das Geld, das in dem Portemonnaie ist.*
Eine Mark ... 2 Mark, 5 Mark.
Ja, kannst du auch sagen, was das zusammen ist?
Das ist 3 Mark (zeigt auf das 1-DM- und das 2-DM-Stück).
Mhm, prima.
Und 5 zusammen macht, 1, 2, 3, ... (tippt auf den Tisch) **6 Mark?**
Hm, wie kommst du darauf?
Das macht 3 (zeigt auf 1-DM- und 2-DM-Stück).
... Mhm –
... die 5, die kommt ja noch dazu, dann wird es 6.

September

Eh, 5 Mark, 2 Mark und 1 Mark.
Prima, guck mal, ne, dann siehst du das noch deutlicher, wenn du das richtige Geld da vorliegen hast, ne?
Mhm, seh ich auch so schon deutlich.
Ja, kannst du mir auch sagen, wie viel das zusammen ist?
Zusammen, da hab ich ich 5, ... 6, ... 7, 8. (zeigt nacheinander auf das 5-DM-Stück, das 1-DM-Stück und das 2-DM-Stück) **8.**

---

4. Schachtelaufgabe
16+6

Juni

Also 16 hast du abgezählt?
(zustimmendes Nicken)
Tun wir jetzt unter die Schachtel wieder, die verschwinden. ... Wie viel sind das? (legt 6 Würfel hin)
Das sind 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Mhm.
6 sind das.
Und zusammen dann?
Hups. ... 16 (ruft sich den 1. Summanden wieder ins Gedächtnis), **... 17, 18, 19, 20, 30, 31.**

September

16 waren da drunter –
... 16.
Ne? Und die 6 kommen da jetzt hinzu.
(12 Sekunden Pause, nimmt dann einen Würfel in die Hand)
Zähl mal ruhig laut.
Zweiundsechzehn, dreiund-, ne, (nimmt nacheinander jeweils einen Würfel in die Hand) **einundsechzehn, zweiundsechzehn, dreiundsechzehn, vierundsechzehn, fünfundsechszehn, sechsundsechzehn** (zählt die 6 Würfel nacheinander ab).
Hm, kannst du mir sagen, was nach der 16 für 'ne Zahl kommt?
... (7 Sekunden Pause) **einundsechzehn.**
Ja?
(zustimmendes Nicken)
Zählst du noch mal für mich ab 13?
... rückwärts?
Ne, vorwärts, ganz normal.
Einunddreizehn, zweiunddreizehn, dreiunddreizehn, vierunddreizehn, fünfunddreizehn, sechzehn-, sechsunddreizehn, ...
Und wenn ich dir sage, dass nach der 13 die 14 kommt? Hm? ... Wie geht das dann wohl weiter? ... 13, 14.
15, 16, 17, 18 –
... Mhm
... 19, 20.
Und was sagst du jetzt, wenn ich sage, da sind 16 Würfel drunter, 6 kommen dazu?
(9 Sekunden Pause)
Wie zählst du dann weiter?
... (zählt leise) **17, ... 18, 19, 20, immer so weiter.**
Wie viel sind das dann? Hinterher insgesamt, wenn du die 6 dazuzählst?
... (zählt dann 6 Finger einzeln ab) **22.**
22? Ja schön, prima.

In einem weiteren Interview im November löste sie diese Aufgabe dann auf Anhieb korrekt.

D 3: Besonderheiten beim Zählen von Schulanfängern

Schulanfänger können schon mehr oder weniger große Abschnitte der Zahlwortreihe korrekt aufsagen: vorwärts, beginnend bei 1 oder einer größeren Zahl, und auch rückwärts. Lotet man ihre Fähigkeiten bis an ihre Grenzen aus, wird man auf unterschiedliche Abweichungen von der uns vertrauten Zahlwortreihe stoßen. Diese Abweichungen machen einerseits deutlich, wo Schwierigkeiten für die Kinder auftauchen, andererseits geben sie uns einen Einblick in die hohe Konstruktivität ihres Denkens.

Manchmal füllen die Kinder Wissenslücken, indem sie das, was sie schon wissen und verstanden haben, in origineller Weise auf unbekanntes Terrain übertragen. Die Ergebnisse sind bisweilen „logischer" als die Konventionen, die uns geläufig sind.

Im Folgenden werden Transkripte von Interviewausschnitten wiedergegeben, bei denen die Schüler vor Beginn und im Verlauf der ersten Hälfte des 1. Schuljahrs mehrfach befragt worden sind. Zur besseren Lesbarkeit sind die gesprochenen Zahlworte in der Regel in Ziffernschreibweise wiedergegeben. Liest man die Zahlsymbole so, wie sie korrekt gelesen werden, ergibt sich das, was die Kinder gesagt (nicht in jedem Fall aber auch gemeint) haben.

- Identifizieren Sie alle Auffälligkeiten in den nachstehend wiedergegebenen Zahlwortreihen!
- Welche Schwierigkeiten werden sichtbar? Welche Erklärungen sind für die beobachteten Abweichungen möglich?
- Welche Abweichungen sind noch denkbar, die nicht in den abgedruckten Dokumenten auftauchen?
- Welche Unterschiede, welche Gemeinsamkeiten lassen sich zwischen den Dokumenten derselben Schüler feststellen?

1. Erwin

Juni

Du kannst doch bestimmt zählen, oder?
(zustimmendes Nicken)
Fängst du mal einfach an zu zählen?
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 90.
... Was hast du nach der 28 gesagt? Zuletzt?
Neun ... zig.
90? Gut, du kannst aber schon weit zählen. He? Kannst du auch von 23 an weiterzählen?
(verneinendes Kopfschütteln)
Und wenn ich dir mal ein bisschen helfe?
(zustimmendes Nicken)
23, 24.
23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 90, 91, 92, ...
Da hört's auf?
(zustimmendes Nicken)
Gut. Kannst du denn auch von 53 aus weiterzählen?
(verneinendes Kopfschütteln)
Und wenn ich dir helfe? 53, 54.
53, 54, 56, 57, 58, 59, ... 80, 83, 82, 83, 84, 85, 87, ... 89, ... elfzig, ... einundelfzig, dreiundelfzig, sechsundelfzig, ... genug.
... Kannst du noch weiter?
(verneinendes Kopfschütteln)

November

Zunächst zählt er zwischen 23 und 39 unter Auslassung der „Schnapszahlen" (Zahlen mit der gleichen Zehner- und Einerziffer) und soll nun von 53 an weiterzählen. Er sagt, er könne dies nicht.
Und wenn ich dir helfe? 53, 54.
54, ... 58, 59, 30.
Und dann?
31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41 ...
... Gut so.
(E sagt entweder 42 oder 43)
Mach mal lauter, schön.
49, ... (9 Sekunden Pause, bewegt dabei seinen Mund) **45.**
Und dann?
Sechsun-, 46, 47, 48, 49, 30.
Hm, gut –
... 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, vier- ... 90. 91, 92, 93, 94, ...
Kannst du noch weiter?
(verneinendes Kopfschütteln)
95, 96.
95, 96, 97, 98, 70, 71, 72, 73-
... Mhm, da wollen wir mal aufhören.

2. Timo

Juni

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ... 17, ... und dann die 18, ... bin bei der sieb- ... war bei der 17.
Mhm.
18, 19, 11, ...
Was kommt nach der 19?
11.
Die 11 hattest du doch eben schon.
Ach so, ... ne, weiter kann ich nicht zählen.
Das macht ja nichts. Kannst du denn auch von 13 weiterzählen?
(zählt leise bis 13) **14, 15, 16 –**
... lauter!
(zählt noch mal leise bis 13) **1, 13, 14, ... 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, ... eh, weiter kann ich nicht.**

September

Timo zählt zunächst von 1 bis 39 unter Auslassung der 22.
Und was kommt nach der 39?
70, he? ... 70.
Und dann?
71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, ... 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, ... 40
... Gut, du kannst ja schon weit zählen –
... 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, ... 50, ... 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, ... eh, ich glaube 100.
Und dann, wie geht's da weiter?
Einhundert, zweihundert, dreihundert, vierhundert, fünfhundert, sechshundert, siebenhundert, achthundert, neunhundert, ... eh, weiß ich nicht, weiter weiß ich nicht mehr.

3. Michael

September

Ja... , dann zähl doch mal von 47 rückwärts.
47, 46, 45, 44, 43, 42, 41, ... dreiz-, 93, 83, 73, 63, 53, 43, 33, dreiundzw-, eh (schüttelt verneinend den Kopf) **32, 31, zwanz-, 29, 28, 27, 26, sechs-, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 19, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.**

November

Und, rückwärts zählen, von 47 an, versuchst du das mal?
40, 46, 45, 44, 43, 42, 41, 40, drei-, 39, 38, 37, 36, 35, 34, 33, 32, 31, 30. 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19-
... Ja, das reicht mir erst mal. Und wenn du ... bei 93 anfängst, rückwärts zu zählen, ... kannst du das auch schon?
92, 91, 80, neunund- ... 88, 87, 86, ... kann nicht weiter.

4. Jan

September

Jetzt fang mal von 20 an!
20, ... (9 Sekunden Pause) **20, 19, dr-, ...**
Ist fast richtig gewesen. Überleg mal. ... Du kommst da noch drauf.
... 80, 70, 60, fünfz-, siebz-, 60, 70 –
... Mhm, schön ...
... 50.

November

Ja? Fang mal bei 20 an rückwärts zu zählen.
90, 91, ... 98, 97, 96, ... 95, ... vier-, 94, 93, 92, 91.
Und dann?
80, 81, ne, ... 98, ... 88, achtzig, 87, 86, 85, 84, 83, 82, 81, 70, 71, ... hm.

Das dezimale Zahldarstellungssystem verstehen, richtig gebrauchen und nutzen zu lernen ist eines der zentralen Lernziele des Mathematikunterrichts von der zweiten Hälfte des ersten Schuljahres an. Was für nahezu jeden Inhalt gilt, trifft auch hier zu: Die Kinder sind keine „Tabulae rasae“, sondern bringen eine Vielfalt an eigenem Wissen mit, sei es, dass sie dieses eher beiläufig erworben haben, sei es, dass sie sich aus den schon vermittelten Kenntnissen selbst in neues Terrain vorgewagt haben und Wissenslücken durch eigene Konstruktionen füllen.

Im Folgenden ist in tabellarischer Form eine Auswahl von Reaktionen von Kindern zusammengestellt. Ihnen wurde entweder eine dezimal strukturierte Steckwürfelmenge (z.B. drei Zehnerstangen, von denen sie wußten, dass jede Stange aus zehn Steckwürfeln besteht, sowie sieben Einzelne) vorgelegt, und sie wurden dann aufgefordert zu sagen, wie viele es seien, und das entsprechende Zahlsymbol aus Ziffernkarten zu legen. Oder sie sollten ausgehend von einem Zahlsymbol das entsprechende Zahlwort nennen und ggf. die entsprechende Menge an Steckwürfeln hinlegen.

Die jeweilige Vorgabe ist durch *kursive Schrift* kenntlich gemacht worden. Einzelne Steckwürfel werden durch E, Zehnerstangen durch Z und Hunderterplatten durch H abgekürzt.

- Welche Schülerlösungen entsprechen den Konventionen, welche nicht?
- Welche Gründe könnten die sog. Falschlösungen haben?
- Versetzen Sie sich in die Lage der Schüler und lösen Sie selbst erfundene Aufgaben gemäß der von ihnen gefundenen „Fehlerstrategien“!

Name	Menge	Wort	Symbol
Kamila	*3 Z 4 E*	**vierunddreißig**	**43**
	3 Z	**dreißig**	**30**
	3 Z 4 E		**34**
	4 Z		**40**
	4 Z 3 E	**dreiundvierzig**	**34**
Rena	*12 Z 6 E*	sagt zuerst **zweihundertsechs**	legt dann **206**
Tessa	*10 Z 2 E*	sagt dann **hundert**, guckt auf die E, sagt **zweihundert**	legt zunächst **102**
Patrick	*2 H*	**zweihundert**	**102**
Ann-Katrin		**einhundert**	*101*
		zweihundert	*102*
Elaha		**fünfundzwanzighundert**	*125*
Mohammedreza		**sechzehn**	*124*
Anna		**tausend**	*1000*
		tausendundacht	*1008*
		zwölftausend? Nee, zwölfhundert	*1200*
		(korrekt)	*1324*
		(korrekt)	*1872*
		Milliarden	*10000*
Kamila	**6 Z 8 E**	**achtundsechzig**	86
Patrick	**4 H**	**vierhundert**	*104*
Michael	**10 Z 5 E**	**hundertfünf**	*105*
	11 Z 2 E 4 E	**hundertzwölfvier**	*124*
	11 Z 2 E	**hundertzwölf**	*120*
	11 Z 2 E 1 E	**hundertelfzwei**	*112*
Annelie		**zwölftausendeinunddreißig**	*1231*
	legt **9 H 20 Z**	und sagt: **zweitausend**	
	legt **9 H 30 Z**	und sagt: **dreitausend**	
Mohammedreza		**fünfzehn**	*132*
	10 Stangen	**hundert**	*100*
	1 H 5 E	**fünfhundert**	*105*
		auch fünfhundert	*132*
	1 H 11 E	**elfhundert**	*110*
Tessa	**1 H 1 E**	**einhundert**	*101*
	1 H 5 E	**fünfhundert**	*105*

D 5: Informelle Vorgehensweisen zur Addition im Hunderterraum

Nachstehend werden Episoden aus einer Interviewreihe wiedergegeben, mit Hilfe derer erkundet wurde, ob und wie Kinder des ersten Schuljahres die Dezimalstruktur unseres Zahlsystems schon nutzen, wenn sie die Summe zweier zweistelliger Zahlen ermitteln.

Die Summanden wurden ihnen mit Hilfe von dezimal strukturierten Steckwürfelmengen vorgegeben (z.B. 28 durch zwei Zehnerstangen und acht einzelne Steckwürfel). Die Aufgaben wurden als so genannte Schachtelaufgaben gestellt (vgl. Kap. 3.1 sowie E 2 in Kap. 5.2). Dabei blieb der erste Summand sichtbar liegen, der zweite wurde unter der Schachtel verdeckt. Zur besseren Lesbarkeit ist der sichtbare Summand unterstrichen. Die Transkriptausschnitte setzen immer dort ein, wo es für den Einblick in die Vorgehensweise der Kinder nötig ist.

- Überlegen Sie sich zunächst möglichst viele Möglichkeiten, wie die Kinder die Aufgaben 34+15 und 69+24 gelöst haben könnten! Gibt es Strategien, die sich Ihres Erachtens für bestimmte Aufgaben gut und für andere weniger gut eignen? Welche Fehler könnten dabei auftreten?
- Studieren und beschreiben Sie erst dann die tatsächlichen Rechenwege der Schüler! Welche Unterschiede, welche Gemeinsamkeiten können Sie feststellen?
- Inwieweit stellen das verwendete Material und die eingesetzten Aufgabenstellungen eine Hilfe, inwieweit eine Einschränkung dar? Wie könnte man es anders machen?

---

1. Mohamedreza, 28+13=x

28.
Ja. Und jetzt lege ich 13 hier drunter (legt 13 Steckwürfel in die Schachtel).
13?
Mhm.
(M. zählt an den einzelnen Steckwürfeln um 8 weiter)
13...14, 15, 16, 17 ,18, 19, 20, 21...41.

---

2. Kamila, 16+23=x

(K. zählt erst die Stange dazu und dann leise die Einzelnen) **34, 35, 36, 37, 38,** (laut) **39.**
Und wie bist du darauf gekommen?
Ich habe diese (zeigt auf die Schachtel), **die in der Schachtel sind, genommen, dann hab ich die genommen** (schiebt Stange zur Seite) **und dann die zuletzt gerechnet** (schiebt die Einzelnen dazu).

---

3. Patrik, 34+15=x

(P. überlegt, spricht lautlos, tippt auf die Stangen, leise) **40... 45** ... (spricht wieder lautlos, nach insgesamt 48 Sekunden) **49.**
Mhm. Und woher weißt du das?
Weil ich hab 15 dazugerechnet, ja, zu den 30, das sind ja... ja, da gibt es ja einen dazu, noch so noch einen Zehner. Und 15 ... hab ich dann noch die 5 dazu, das sind ja 45. Und dann noch die dazu (zeigt auf die 4 Einzelnen), **dann sind es 49.**

---

4. Sophia, 34+15=x

Mhm, (überlegt) **49.**
Äh, die (nimmt die 3 Stangen hoch) **sind ja 30 und dann die** (zeigt auf die Schachtel) **sind 40 und dann die** (nimmt die 5 Einzelnen in die Hand) ...
ach, ist ja richtig. Ist das richtig?
Ja, ich hab auch nicht gesagt, dass es falsch war.
Ja, und 5 und 4 sind 9.

---

5. Jakub, 34+15=x

49.
Mhm. Und woher weißt du das?
Weil ich hab einfach von der 15 die 5 weggenommen und dazugetan, dann hatte ich 39 ...
Mhm.
... dann, dann hab ich zu der 39 10 dazugetan. Dann muss, äh, ich von der 10 einen wegnehmen, dass ich 40 hatte, dann hab ich die 9 noch dazu und dann ist es 49.

---

6. Michael, 69+24=x

24. (leise) **Dann noch 70, 80,** (laut) **80. 80 sind das dann** ... (leise, unverständliches Gemurmel, zählt die Stangen nochmals ab) **10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80. Das sind dann 89 ... 91, 92,** (laut) **93.**

---

7. Elaha, 69+24=x

(E. überlegt 14 Sekunden) **93.**
Mhm. Wie bist du darauf gekommen? Das ging ja so schnell.
Weil hier 60 ist (nimmt 6 Zehner in die Hand) ...
Mhm.
... und ... und du nimmst noch, da sind noch 20 ...
Mhm.
... 20, dann wird es 80 ...
Mhm.
... dann sind hier 9 (zeigt auf die Einzelnen) **noch 4, wird es ... ähm 90, dann noch, noch 3, dann wird es 93.**

D 6: Informelle Vorgehensweisen zur Subtraktion im Hunderterraum

Nachstehend werden Episoden aus einer Interviewreihe wiedergegeben, mit Hilfe derer erkundet wurde, ob und wie Kinder des ersten Schuljahres die Dezimalstruktur unseres Zahlsystems schon nutzen, wenn sie die Differenz zweier Zahlen ermitteln. Diese wurden anhand von dezimal strukturierten Steckwürfelmengen repräsentiert (z.B. 28 durch zwei Zehnerstangen und acht einzelne Steckwürfel). Hierzu wurden die sog. Schachtelaufgaben verwendet (vgl. Kap. 3.1; E 2 in Kap. 5.2), bei denen zunächst eine dem Kind bekannte Steckwürfelmenge unter einer Schachtel versteckt wurde. Dann wurde ein Teil dieser Steckwürfel wieder unter der Schachtel hervorgeholt. Nun gab es zwei Varianten: Bei Typ a−b=x wurde dem Kind die hervorgeholte Steckwürfelmenge präsentiert; die Aufgabe bestand darin zu ermitteln, wie viele noch in der Schachtel seien. Beim Typ a−x=b wurden die in der Schachtel verbliebenen Steckwürfel gezeigt und die Frage zielte dahin, wie viele herausgenommen worden seien. Die Transkriptausschnitte setzen immer dort ein, wo es für den Einblick in die Vorgehensweise der Kinder nötig ist. Zur besseren Lesbarkeit ist diejenige Zahl unterstrichen, deren Steckwürfelmenge für die Kinder sichtbar war.

- Überlegen Sie sich zunächst möglichst viele Möglichkeiten, wie die Kinder die Aufgaben 42−14=x und 37−x=26 gelöst haben könnten! Gibt es Strategien, die sich Ihres Erachtens für bestimmte Aufgaben gut und für andere weniger gut eignen? Welche Fehler könnten dabei auftreten?
- Überlegen Sie sich anschließend, welche Fehler Kinder bei der Bearbeitung dieser Aufgaben machen könnten!
- Studieren und beschreiben Sie erst dann die Rechenwege der Schüler! Welche Fehler können Sie wodurch erklären, welche nicht? Welche Unterschiede, welche Gemeinsamkeiten können Sie feststellen?
- Inwieweit stellen das verwendete Material und die eingesetzten Aufgabenstellungen eine Hilfe, inwieweit eine Einschränkung dar? Wie könnte man es anders machen?

---

1. Tessa, 28−<u>5</u>=x

(I legt 28 Steckwürfel)
20, (zählt leise mit dem Finger die Einzelnen) **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,** (laut) **28.**
Ja. (legt 28 Steckwürfel in die Schachtel und nimmt 5 heraus) *Und die nehm ich raus.*
(T zählt leise die Einzelnen) **1, 2, 3, 4, 5 ähm ... 23.**
Mhm. Und wie bist du darauf gekommen?
Ich hab von den 5, bis es 8 wird, gezählt und das sind 3 (zeigt 3 Finger), **also nur noch 23.**

---

2. Mohamedreza, 24−<u>6</u>=x

(I legt 24 Steckwürfel) *Wie viel sind das?*
24.
Mhm. (legt 24 Steckwürfel in die Schachtel und nimmt 6 heraus) *Und wie viel sind das, die ich rausgenommen habe?*
(M zählt die Einzelnen) **6.**
Mhm. Und wie viel sind noch in der Schachtel?
8.
Und woher weißt du das?
Weil ich hab hier jetzt 6, (nimmt 6 Steckwürfel) **da müssen nur noch 4 sein von den 10, und noch 4 war dazu, gleich 8.**

---

3. Anna, 37−<u>11</u>=x

(I legt 3 Stangen und 7 Einzelne) *Und das?*
37.
Mhm. (legt die Steckwürfel in die Schachtel) *Ups, so, die nehm ich raus* (nimmt 1 Stange und 1 Einzelnen heraus).
Dann sind es ... 29.
Mhm. Und woher weißt du das jetzt?
Weil wenn das ... wenn 30 minus 10 ist, ist es ja dings, wie heißt das noch mal, ist es dann, das ist dann 20. Und wenn man noch mal einen wegnimmt, ist es 29.

---

4. Anneli, 42−<u>14</u>=x

Und wie viel hab ich jetzt rausgenommen? (I nimmt 1 Stange und 4 Einzelne heraus)
4 ... 14.
Mhm.
(leise) **42 minus 14 ...** (überlegt, spricht lautlos, schiebt 1 Stange zur Seite, beschäftigt sich mit den Einzelnen), **das sind 28.**
Mhm.
Also, ich hab erst das weggenommen (zeigt auf die Stange), **dann hab ich erst mal 2 für das ... und dann hab ich noch die 2 weggenommen, das waren 28.**

---

5. Sophia, 37−x=<u>26</u>

(I räumt die 37 Steckwürfel in die Schachtel)
Habe welche weggenommen (nimmt 1 Stange und 1 Einzelnen heraus), *und habe die übrig* (zeigt 2 Stangen und 6 Einzelne).
(überlegt) **Wie viel waren's eben?**
37, und jetzt hab ich ...?
26. (leise) **20 bis 30 ...** (überlegt), **11 hast du weggenommen.**
Mhm. Und woher weißt du das?
Äh, einfach gerechnet. Weiß ich auch nicht mehr, wie ich gerechnet hab.

---

6. Tessa, 37−x=<u>26</u>

(I legt 37 Steckwürfel)
20. (zählt die Einzelnen) **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 siebenun- ... siebenunddreißig.**
Ja, 37. (legt 37 Steckwürfel in die Schachtel, nimmt welche heraus und zeigt die restlichen 26 Steckwürfel)
37, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... (schiebt 2 Stangen zur Seite) **Das sind schon mal 20, 26 und 37 waren's ... also hast du genommen ... 11.**
Ja. (zeigt die 11 Steckwürfel) *Woher weißt du das jetzt so schnell?*
Wenn ich jetzt den dazulegen würde, (zeigt auf die 6 Einzelnen) **dann wär's 27, dann kann ja nur noch 10** (nimmt eine Stange und legt sie zu den 2 Stangen) **da fehlen.**

---

7. Kamila, 37−x=<u>26</u>

(I legt 37 Steckwürfel) *Wie viel sind das?*
37.
Mhm. (legt 37 Steckwürfel in die Schachtel, nimmt welche heraus und zeigt die restlichen 26 Steckwürfel) *Und die bleiben übrig.*
36, 26.
Mhm.
Mhm. Und es sind 11 weg.
Schön, und woher weißt du das?
Weil ... 30 hat ja was mit 10 zu tun, dann hab ich 10 von 30 weggenommen, ...
Mhm.
... dann noch eine 1 von 7.

---

8. Elaha, 18−x=<u>13</u>

(I legt 18 Steckwürfel) *Wie viel hab ich da?*
18.
Mhm. (legt 18 Steckwürfel in die Schachtel und nimmt welche heraus) *So jetzt nehme ich wieder welche weg, und dann habe ich die übrig.* (zeigt die restlichen 23 Steckwürfel)
(E überlegt 10 Sekunden) **5.**
Mhm. Und woher weißt du das jetzt?
Weil ... wenn man 5 hat und dann noch 8 ... äh 3 dazumacht, dann sind's gleich 8.

D 7: Subtraktion im Hunderterraum – Lösungswege von Jo-Ann

Bevor die Subtraktion im Hunderterraum Gegenstand des Unterrichts war, wurden Zweitklässlern in vier Interviews Abzieh- und Ergänzungsaufgaben vorgelegt – sowohl formal auf Aufgabenkarten (im 1. und 2. Interview) als auch als Textaufgaben (im 3. und 4. Interview). Im Folgenden werden einige Episoden aus den Interviews mit Jo-Ann wiedergegeben.

Die folgenden sechs Aufgaben wurden mit Ausnahme der 5. als Textaufgaben gestellt. Die formal angegebenen Gleichungen sollen lediglich der Orientierung der Leserin dienen.

- Beschreiben Sie Jo-Anns Lösungswege!
- Wie lassen sich ihre Fehler erklären?
- Sehen Sie Gründe für die jeweilige Wahl der Vorgehensweise? (z.B.: Warum subtrahiert Jo-Ann bei 74–58 nicht?)
- Für die ersten drei und die letzten drei Aufgaben wurden jeweils die gleichen Zahlenwerte – wenn auch an unterschiedlichen Stellen in der Gleichung – verwendet. Welche Zusammenhänge, welche Unterschiede können Sie in den Rechenwegen erkennen?

---

1. 58+x=74 (3. Interview; 7.3.)
Daniela hat 58 Sticker. … (Jo-Ann schreibt sich 58 auf.) *… Ihre Freundin schenkt ihr noch welche dazu. Jetzt hat sie 74 Sticker. …* (Jo-Ann schreibt sich = 74 auf, so dass jetzt 58 =74 auf dem Zettel steht.) *… Wie viele hat ihre Freundin ihr dazugeschenkt?*
(nach 10 Sekunden) **24.**
Hm. Und wie bist du darauf gekommen?
Uff, weil von 50 bis 70 ist 20. Und dann noch plus 4, ist 24.

2. 74–58=x (4. Interview; 9.3.)
Daniela hat 74 Sticker. (Jo-Ann schreibt sich die Zahl 74 auf.) *Davon schenkt sie 58 Sticker ihrer Freundin.*
(Sie schreibt sich –58 auf, so dass jetzt 74 – 58 auf dem Zettel steht.) (leise) **Minus 58.**
Wie viele Sticker behält Daniela noch übrig?
Mm. (nach 10 Sekunden) **24.**
Und wie kommst du darauf?
... 50 plus 20 ist se- ... 70. Und plus 4, das ist 24.

3. 74–16=x (3. Interview; 7.3.; unmittelbar nach Nr. 1)
So, Irene hat 74 Sticker.
(Sie will sich 74 aufschreiben, merkt aber, dass sie die Zahl schon auf dem Zettel stehen hat.) **Ach, die war schon.**
Davon schenkt sie 16 Sticker ihrer Freundin. Wie viele Sticker behält Irene noch übrig?
Mm. (Sie schreibt – 16 hinter die Zahl 74.) **... 60 ....** (nach 13 Sekunden) **Gleich 58.**
Hm. Und wie bist du darauf gekommen?
Weil 10 von vier ... 74 ist gleich 60. Und dann noch die 6, also dann nehme ich 4, dann hab ich 4. Dann muss ich 6 von der 4 wegnehmen.
Hm.
Äh, Quatsch, ... 4 zu der 6 tun.
Warum?
Weil, ... mm. Weiß ich eigentlich nicht.
Was meinst du denn jetzt, ist richtig von dem, was du alles gesagt hast?
Oh, gar nichts. Oh.
Dann rechne noch mal neu, wenn du meinst, gar nichts.
Dann mach ich mal ...., hat mein Papa mir gezeigt. (Sie schreibt sich ein Minuszeichen vor die Zahl 74 und dann die Zahl 16 stellengerecht darunter. Dann schreibt sie bei der Zahl 16 eine 2 unter die 6.) **Zwei.** (Danach schreibt sie bei der Zahl 16 eine 6 unter die 1.) **Das sind 62.**
Und wie bist du da jetzt drauf gekommen?
Weil, mm also, ... 4 von der 6 ist 2. Und 1 von der 7 ist 6.

4. 60–18=x (3. Interview; 7.3.; unmittelbar nach Nr. 3)
In einer großen Dose sind 60 Bonbons.
Oh. (Sie schreibt sich 60 auf.)
Die Kinder nehmen 18 Bonbons aus der Dose.
Minus (Sie schreibt ein Minuszeichen vor die Zahl 60.) **18.** (Sie schreibt 18 stellengerecht unter die Zahl 60.)
Wie viele Bonbons sind noch in der Dose?
Oh. 8. (Sie schreibt bei der 18 eine 8 unter die 8.) **58.** (Sie schreibt bei der Zahl 18 eine 5 unter die 1.)
Wie bist du denn darauf gekommen?
Weil 8 von der 0 geht nicht, das bleibt dann 8. Und 1 von der 6 ist 5.
Warum geht das nicht von der 0?
Ah, weil 8 immer a... 8 bleibt.
Wie viel ist denn 58 plus 18?
Uff. Nicht 16, aber nicht 60.
Hm. Und?
Dann muss da (Sie zeigt wahrscheinlich bei der Zahl 58 auf die 5.) **ne 1 hin. Oh. Äh, ja.. Mm. Wie viel ist 50 minus 8? Plus oder plus? 52.**
Und wie viel ist 52 plus 18?
Mm, auch nicht 60. 42.
Hm. Und wie bist du da drauf gekommen?
Jam, weiß ich nicht so ganz genau. Oh. ... 50 minus 8 gleich 48.
50 minus 8?
Was?
Du hast gesagt, 50 minus 8 ist 48?
Mmh. 60 minus 18 ist 48.
Hm. Okay.

5. 18+x=60 (2. Interview, 15.2.)
(I legt die Aufgabenkarte auf den Tisch)
18 plus wie viel gleich 60. Mm. Warum macht ihr immer so schwer?
Die sind doch gar nicht so schwer. Versuch mal!
55 minus 8. 42.
Hm. Und wie bist du darauf gekommen?
Von der ... Von ... Jetzt hab ich die 8 davon (Sie zeigt auf die Zahl 18.) **weggenommen und von der z ... Dann hab ich einfach nur 10 bis zur 60 genommen, das sind 50. Und dann plus 8, das sind 58. Häh. Ja, 58.**
Warum denn plus 8?
Mm. Weil erst hab ich doch 10 bis zur 60. Und dann noch plus 8, weil die 8 zu der ... Weil ich nur, mm, keine 18 genommen hab, sondern nur 10.

6. 18+x=60 (4. Interview, 9.3.)
In einer großen Dose sind 18 Bonbons. … (Jo-Ann schreibt sich die Zahl 18 auf.) *… Die Mutter muss einige Bonbons in die Dose tun, damit 60 Bonbons in der Dose sind.* (Sie schreibt sich die 60 auf, so dass jetzt 18 60 auf dem Zettel steht.)
Wie …
52. Ohh. (Sie freut sich.)
Wie kommst du darauf?
Oh, weil 52 plus 18 ist 60.
Wie hast du denn gerechnet?
Mm. Mmmm. 52 plus 8 ist 10, plus, mm, ... 42.

D 8: Subtraktion im Hunderterraum – Lösungswege von Ivo

Bevor im Unterricht die Subtraktion im Hunderterraum behandelt worden war, wurden den Zweitklässlern zur Mitte des Schuljahres in Interviews Subtraktions- und Ergänzungsaufgaben als Textaufgaben und formal auf Aufgabenkarten gestellt. Studieren Sie zunächst das folgende Transkript des Interviews mit Ivo, dem die Karte mit der formalen Aufgabe 18+x=60 vorgelegt wurde.

- Versuchen Sie möglichst viele von Ivos Äußerungen zu verstehen! Bedenken Sie, dass es hierbei durchaus unterschiedliche Deutungen geben kann. Welche Bemerkungen Ivos können Sie nicht nachvollziehen?
- Versuchen Sie in dem langen Transkript gewisse Grundmuster zu sehen. Welche Kompetenzen besitzt Ivo schon? Welche Schwierigkeiten hat er?
- Bewerten Sie das Verhalten der Interviewerin. Was hätte sie Ihrer Meinung nach auf welche Weise besser machen können, was hat sie gut gemacht? Wo liegen eventuell die Hintergründe ihres Verhaltens?

So, dann lies mir die mal noch vor!

18 plus Kästchen gleich 60. Muss ich erst mal fünf da ... 50 dazurechnen, dann hab ich erst mal 60. Dann muss ich aber noch von den, von den 18 (Er zeigt auf die Zahl 18.) **8 abrechnen.**

Hm.

Dann wäre das dann, wenn ich die dazutue .... Welche Zahl kommt denn da wohl rein? Ne, noch mal. Ne, so geht das doch überhaupt nicht. Mm. Mm. 18 plus Kästchen gleich 60. Nein, noch mal. 8 (Er schaut die Interviewerin an.) **sind das dann doch. Weil ich doch nur ... Ne, dann hab ich, wenn ich jetzt, erst mal 50 zu ..., jetzt, jetzt erst mal fünf ... Wenn ich jetzt erst mal von den** (Er zeigt bei der Zahl 18 auf die 1.) **50 zutue, ...**

Hm.

... dann hab ich ja jetzt gleich dann 68.

Hm.

Also muss ich 8 wegtun.

Hm.

Also muss ich ... mm ... irgendwie die 8 abziehen. ... Aber wie? (nach 15 Sekunden) **Warte mal!** (nach 15 Sekunden) **Hm? Hm? Warte mal!** (nach 14 Sekunden) **Da muss ich einfach nur 50 zusetzen.**

Ja, dann haste 68, haste gesagt.

Ja, und minus 8 dann noch.

Hm.

Mm. (nach 11 Sekunden) **Mm.** (nach 13 Sekunden) **Mm.** (nach 18 Sekunden) **Mm. ... 5 dazusetzen, sind 68. Minus 8 sind 8 dann nur noch. Nur noch ... 58 hab' ich jetzt. Wenn ich jetzt 58 hier zutue, ... Ne, 18 plus Kästchen gleich 60? Mm. Mm. ... erst mal 50 dazu und dann die 8 erst mal weg, dann hab ich ja jetzt 60.**

Hm.

85 müsste dann eigentlich (Er zeigt auf das leere Kästchen.) **hier hinkommen.**

85?

(betont) **58 müssen da eigentlich reinkommen, dann.**

Ja, dann rechne mal, ob 18 plus 58 60 ist!

18 plus achtn..., ne! Da muss ich einfach nur 50 hinsetzen. Und die 8 muss ich ja auch noch irgendwie mitnehmen. Mm.

Pass mal auf, gib mal den Stift! (Ivo gibt ihr den Stift.) *So weit wie du jetzt bist, ne, dann heißt die Aufgabe, mm, dann heißt die Aufgabe ja* (Sie schreibt 18 + = 60 auf den Zettel.) *18 plus 50 gleich 60, ne? So, jetzt versuch mal, jetzt die Zahlen so zu verändern, dass 60 auch rauskommt.*

Mm. Die Zahlen so verändern, dass 60 rauskommt.

Welche Zahl darfst du denn verändern?

Eigentlich nur die, eigentlich nur die 18.

Ja? Die steht aber da!

Mm. In echt eigentlich nur die 50.

Ja. So, was musst du jetzt wohl machen?

Einfach nur die 8 wegnehmen.

Wovon?

Von den ... von den 58.

Von welchen 58?

Ne, von den 18 einfach die 8 wegnehmen.

Mmh. Das kannst du nicht machen, die 18 steht da ja schon.

Aber darf ich ja nicht. Mm. Müssen 60 werden. Puh. Mm.

Von welcher Zahl darfst du denn 8 wegnehmen?

Eigentlich nur, wenn 58 da ständ.

Warum, wenn 58 da ständ?

Weil von den ... Die 18 darf ich ja nicht verändern.

Ne, und warum darfst du von der 50 keine 8 abziehen?

Mm. Darf ich doch.

Du hast gerade gesagt, von 58 nur.

Kann ich auch ... Mm. Die ganze 50 kann ich ja verändern!

Hm.

Dann hab ich jetzt genau 50 minus 8, sind dann ... 50 minus 8 sind ... Ne, 50 ... Ja, 50 minus 8 muss ich dann rechnen. 50 minus 8, mm ... 50 minus 8 sind wieder dann 48. Weil ich ja nun die 8 abziehe.

Hm. Wenn du von 50 8 abziehst, ist 48?

Ne, da zieh ich ja 10 ab. Will aber nur 8 abrechnen ... Mm. Mm. Wenn ich 50 minus 8 rechne, ... Mm. 50 minus 8 ... Wenn ich 50 habe, das sind dann ... Ne, das sind dann 42.

Hm. So, dann rechne mal jetzt die Probe mit 42!

Wie die Probe?

Ja, wenn du 42 hier (Sie zeigt auf das leere Kästchen.) *einsetzt, kommt da dann auch 60 raus?*

Mm. Genau auf 60? ... ich einfach noch 20 dazutun, dann hab ich 60. Einfach noch 20 dazu.

Wozu?

... 50. Ne.

Du hast doch gesagt, 42 muss da hin.

Ja.

Ist denn 18 plus 42 sechzig?

Ne.

Nicht?

Ne. 18 plus 42 ...? Doch, ne.

Ja?

18 plus 52.

Komm wir probieren das mal mit Steckwürfeln! (Sie legt 7 Zehnerstangen auf den Tisch.)

Mm. Wär besser.

18 plus 42.

18 muss ich mir erst mal rauspicken. So, das sind 10 ... (Er legt sich 10 Steckwürfel hin.) **Und das hier sind 8.** (Er legt 18 Steckwürfel an die obere Tischkante.) **Hab ich jetzt 18.**

Hm.

Und dann soll ich jetzt davon 60 kriegen. (Er will sich von den übrigen 50 Steckwürfeln 60 abzählen.) **10, 20, 30, 40, 50. Hier fehlt noch ein Klotz, ein Zehner.** (Die Interviewerin gibt ihm noch eine Zehnerstange.) **Ein Zehner. So, jetzt hab ich 60.**

Du solltest nur die Probe mal rechnen, ob das stimmt, die 42!

Probe?

Ja, 18 plus 42 sollst du nur mal ausprobieren, ob das 60 ist.

Wenn ich jetzt erst mal von den 4 fünfzig zutue, von den 40 einen Zehner ... Ja.

Ja? Dann ist gut. Wollste nicht noch eben nachlegen und das probieren?

Mmh.

Nicht mehr? Brauchste nicht? Dann ist gut.

D 9: Multiplikatives Rechnen zu Beginn des 2. Schuljahres

In Interviews wurden Schülern zu Beginn des 2. Schuljahres vor der „offiziellen" Einführung der Multiplikation und Division Aufgaben mit multiplikativer Struktur (Multiplikationsaufgaben, Aufteil- und Verteilaufgaben) gestellt. Die Kinder haben diese fast vollständig richtig gelöst, die meisten von ihnen im Kopf, also ohne Verwendung von Material. Eine Vielfalt von Lösungsstrategien konnte beobachtet werden. Eine kleine Auswahl ist durch die nachfolgend abgedruckten Transkriptausschnitte von einem Interview mit Julia repräsentiert.

Aufgabe 1: Verschaffen Sie sich einen gründlichen Einblick, indem Sie

- Julias Rechenwege bzw. die mathematischen Beziehungen, die mit den Rechenwegen in Verbindung gebracht werden können, formal notieren (das könnte für Aufgabe 1.1 z.B. wie folgt aussehen: 4+4=8; 8+[ ]=10; 8+2=10; 2+[ ]=4; 10+2=12 oder 4+4+4=8+4=8+(2+2)=(8+2)+2=10+2=12),
- die unterscheidbaren Typen von Rechenwegen stichwortartig benennen (für 1.1 beispielsweise „wiederholte Addition"),
- überlegen, ob es noch andere Typen von Rechenwegen geben könnte, die hier nicht auftauchen,
- feststellen, bei welchen Aufgaben es sich um Aufteil- und bei welchen es sich um Verteilaufgaben handelt, und untersuchen, ob eine Beziehung zwischen dem Aufgabentyp und der Art des Rechenweges erkennbar ist.

Aufgabe 2: Welche anderen Aufgabentypen (semantische Strukturen), welche anderen Aufgabenkontexte zum multiplikativen Rechnen können für ein solches Interview noch in Frage kommen?

1.1 *Der Peter, der geht 3-mal zum Schrank und nimmt immer 4 Teller auf einmal. Wie viele Teller hat er dann weggebracht?*
(sofort) **12.**
Oh, toll, wie hast du denn das so schnell rausgefunden, mmh?
Ich habe erst mal 4 plus 4 gerechnet und dann 2, das sind dann 10 und dann noch mal 2, das sind dann 12.
Schön, ja.

1.2 *Jetzt geht er 4-mal zum Schrank und er hat insgesamt 8 Teller weggebracht und jedes Mal gleich viele. Wie viele hat er dann jedes Mal genommen?* (J antwortet: „4"; die Aufgabenstellung wird vom Interviewer nochmals wiederholt, der dann 8 Klötze abzählt und zu J hinschiebt.) *Und 4-mal ist er zum Schrank gegangen und hat jedes Mal gleich viele genommen. Wie viele hat er dann jedes Mal genommen?*
2.
Mmh, gut, und wie hast du das rausgefunden?
Ich habe erst mal 2 so ... (schiebt 2 Klötze von der 8er-Gruppe beiseite.) **... und dann noch mal 2 ...** (schiebt 2 weitere Klötze beiseite) **... und dann noch mal 2 ...** (schiebt 2 weitere Klötze beiseite) **... und dann noch mal hier ...** (schiebt die letzten 2 Klötze beiseite) ... **habe ich immer, immer so 2 weggenommen** ... (J formt die 8er-Gruppe zu einem 2x4-Feld.)
Mmh.
... und wenn dann hatte ich immer bei jedem 2 ...
Ja.
... und wenn das nicht 2 gewesen wären, dann ...
Mmh.
... hätte ich vielleicht so 3 gemacht (entfernt die rechte Spalte des 2x4-Feldes und legt sie als 2er-Reihe oben an das Feld an)
Mmh, aber mit 2 hat es schon geklappt, ne?
Aber das ging nicht. (Es wird nicht deutlich, ob J mit 3 probiert hat, oder ob sie einfach den Schluss zieht, dass es mit 3 nicht gehen kann, wenn es mit 2 klappt.)

Also er nimmt jedes Mal 3 Teller ... und 15 hat er weggebracht. (J nickt.) *Wie oft ist er dafür gegangen?* 1.3
(J betrachtet ihre zu lockeren Fäusten geformten Hände; nach 25 Sekunden) **5-mal.**
Mmh, toll. Und wie hast du das rausgefunden?
Ich habe erst mal von 15, ähm, 3 abgezogen, dann sind das 12 und dann wieder bis 9 ...
Mmh.
... das waren wieder 3, dann haben wir schon mal 2 mal 3 ... (spreizt Daumen und Zeigefinger der rechten Hand ab. Dann nimmt sie noch den Mittelfinger dazu.)
Mmh.
... und dann von der 9 ... (hat beide Hände vor sich auf dem Tisch liegen und betrachtet sie.)
Mmh.
... habe ich noch mal ... 3 abgezogen, dann

hatte ich 7, und dann, dann habe ich wieder 3, dann hatte ich nur noch ... (J spreizt Ringfinger und kleinen Finger der rechten Hand ab. Es bleibt offen, ob J mit der rechten Hand die 7 demonstriert, oder die drei Male, die sie die 3 schon abgezogen hat. Die Unklarheit dieser Struktur könnte eine mögliche Ursache ihres Rechenfehlers sein).
Na, stimmt was nicht? (J schüttelt den Kopf.) *Pass mal auf, fang noch mal bei der 9 an. Wenn du von der 9 drei abziehst, wie viele bleiben übrig?*
6 ...
Ja, mmh.
... und dann wieder 3 und dann wieder 3.
Toll, das hast du schön gemacht.

2.1 *Mit einem Fahrstuhl wollen jetzt 16 Leute auf so einen Turm und in den Fahrstuhl passen immer nur 4 Leute rein. Wie oft muss der Fahrstuhl nach oben fahren?*
4-mal.
Mmh, richtig, und wie hast du das rausgefunden?
Erst mal habe ich 8 zusammengetan und dann noch 8 ... (hält die Hände mit den Handflächen parallel zueinander und deutet mit ihnen einmal nach rechts und dann nach links auf den Tisch)
Mmh.
... und dann habe ich die geteilt ... (hält die Hände mit den Handflächen parallel zueinander und deutet mit ihnen direkt vor sich auf den Tisch)
Mmh.
... das sind nämlich 8 plus 8 sind 16 ... (hält die Hände mit den Handflächen parallel zueinander und deutet mit ihnen einmal nach rechts und dann nach links auf den Tisch)
Mmh.
... und dann habe ich die geteilt ... (hält die Hände mit den Handflächen parallel zueinander und deutet mit ihnen direkt vor sich auf den Tisch) ... **und dann hatte ich immer 4.**
Mmh, prima.

2.2 *So, und jetzt sind wir in einem anderen Turm und in einem anderen Fahrstuhl. Da wollen 12 Leute hoch ... und der Fahrstuhl muss 4-mal fahren, bis sie alle oben sind, und nimmt jedes Mal gleich viele mit. Wie viele hat er dann jedes Mal mitgenommen?*
4 muss ... (hat beide Hände mit abgespreizten Fingern auf dem Tisch liegen)
Also, 12 Leute sind es und 4-mal muss er fahren.
3.
Mmh. 3 nimmt er mit, mmh, und wie hast du das rausgefunden?
Erst mal 6 plus 6, das sind 12, da habe ich erst mal das gesucht, wie man das zusammentun kann. Und dann hab ich überlegt, wie man die teilen kann, und dann hatte ich 3 raus. (gestikuliert mit den Händen)

Mmh, schön, du kannst ja toll rechnen. Das ist ja schön.

Ja, also die Schokolade hat 4 Reihen und in jeder Reihe 5 Stücke. Wie viele Stücke hat sie dann? 3.1
20.
Oh, und wie weißt du das?
Ich habe erst mal 2 zusammen 5 plus 5 gerechnet ... (tippt mit Zeigefinger und Daumen der rechten Hand auf den Tisch)
Mmh.
... und dann noch mal 5 plus 5... (tippt mit Zeigefinger und Daumen der rechten Hand auf eine andere Stelle des Tisches)
... dann haben wir 2-mal 10 ... (tippt mit den Zeigefingern beider Hände auf den Tisch)
Mmh.
... und dann noch mal die beiden Zehner zusammen ...
Mmh.
... dann habe ich, haben wir 20.
Ja, schön, so.

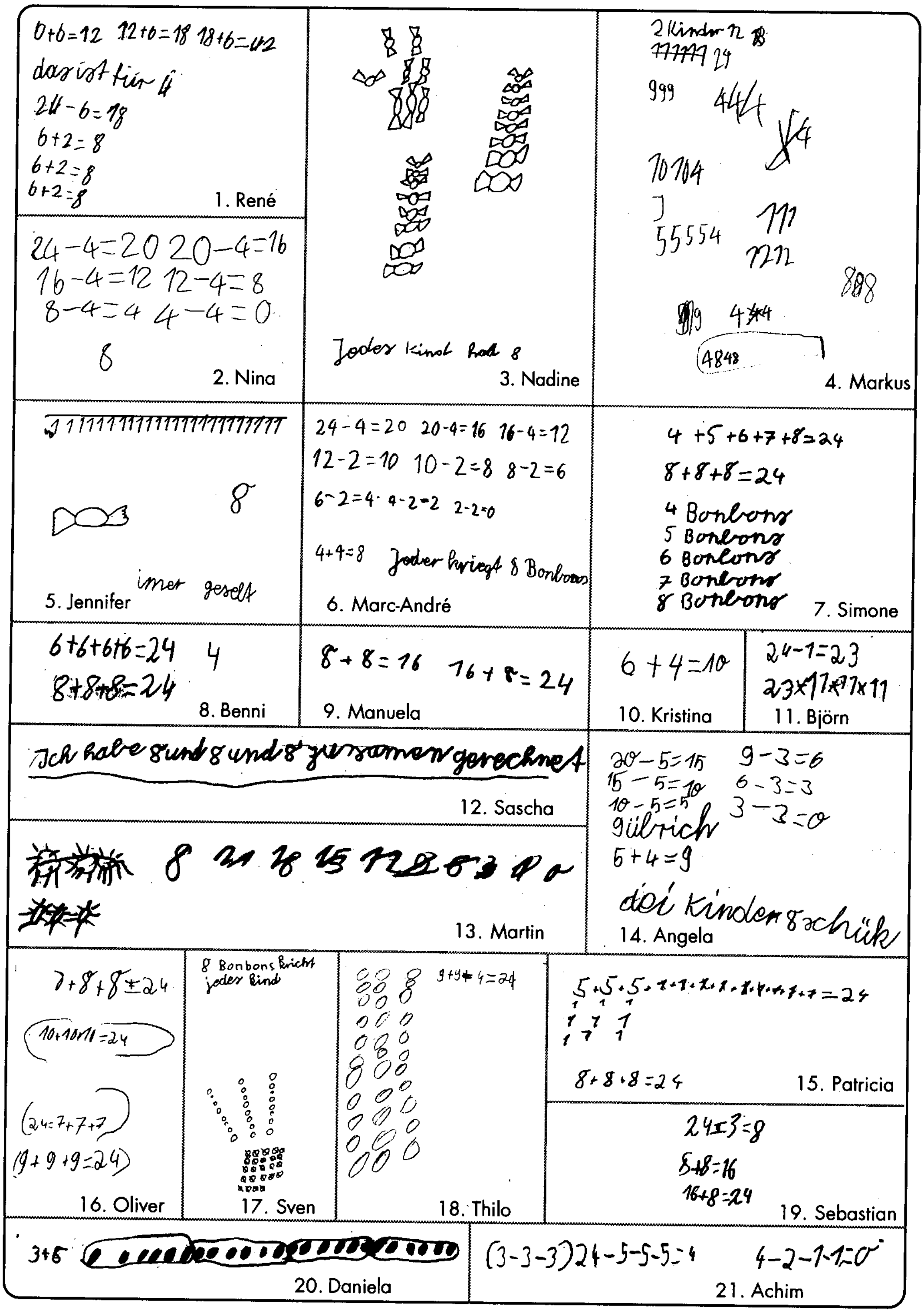
So, und jetzt wird es ein bisschen anders. Die Tafel Schokolade hat 3 Reihen und insgesamt 18 Stücke. Wie viele Stücke sind in jeder Reihe? Du darfst auch die Klötze nehmen, wenn du willst. 3.2
(J zählt einzeln 18 Klötze ab und bildet nacheinander drei 6er-Gruppen.) **3.**
Was?
Ähm, 6.
6 in jeder Reihe. Wie bist du da gerade drauf gekommen, dass es 6 sind?
Ähm, weil 5 habe ich erst mal im Kopf gerechnet, das ging nicht. Da habe ich überall noch einen dazugetan, dann hatte ich 6.
Aha, schön, ja.

So, und jetzt haben wir wieder eine andere Tafel Schokolade, die hat in jeder Reihe 4 Stücke, und insgesamt sind es 12 Stücke. Wie viele Reihen hat sie dann? 3.3
(J hat beide Hände mit abgespreizten Fingern auf dem Tisch liegen) **4 Reihen? 4 Reihen, ne?**
4 Reih ..., nein, nein, also, in jeder Reihe hat sie 4 Stücke und insgesamt sind es 12 Stücke. Jetzt möchte ich wissen, wie viele Reihen das sind.
(nach 10 Sekunden) **Sind 3.**
Mmh, und wie hast du das rausgefunden?
Erst mal 8 und dann, das sind die, ähm, ähm, da kann man das teilen, und dann haben wir einmal 4, und dann geht das ja noch weiter 2 bis 10 und dann noch mal 2 bis 12. Und dann haben wir noch mal 4, und dann sind das 3.
(J gestikuliert mit den Händen. Dabei zeigt sie auf verschiedene Stellen des Tisches.)
Sehr schön.

D 10: Informelle Vorgehensweisen bei einer Verteilaufgabe

Im Januar – also bevor im Unterricht die Multiplikation und die Division thematisiert worden waren – bearbeiteten 21 Kinder eines zweiten Schuljahres die folgende Aufgabenstellung: „In einer Tüte sind 24 Bonbons. 3 Kinder teilen sich die Bonbons." Die Kinder wurden gebeten schriftlich niederzulegen, wie sie das Ergebnis ermittelten.

- Versuchen Sie die einzelnen Vorgehensweisen und die zugrunde liegenden Denkwege zu verstehen! Teilweise sind die Rechenwege nicht ohne weitere Erläuterungen vollständig zu erklären. Das sollte Sie jedoch zunächst einmal nicht entmutigen, denn auch im Unterricht werden Sie bisweilen vor vergleichbare Situationen gestellt.
- Wie könnte man die einzelnen Vorgehensweisen ordnen?
- Welche Konsequenzen ziehen Sie aus der Analyse der einzelnen Dokumente?
- Eine Aufteilaufgabe mit denselben Zahlenwerten könnte lauten: *„In einer Turnhalle sind 24 Kinder. Es sollen immer drei Kinder in eine Gruppe."* Geben Sie unterschiedliche Rechenwege an, die Zweitklässler vor der Behandlung des multiplikativen Rechnens bei dieser Aufgabe wählen könnten!



D 11: Langfristige Lernprozesse beim multiplikativen Rechnen

In mehrwöchigem Abstand wurden während der zweiten Hälfte des 2. Schuljahres in fünf Einzelinterviews mit Achim (links) und Marc-André (rechts) deren Lösungswege zu der kontextfrei dargebotenen Aufgabe 8·9 sowie zu der Textaufgabe *„In einer Tüte sind 24 Bonbons. Drei Kinder teilen sich die Bonbons"* erhoben.

- Die Aufgabe 8·9 wurde im ersten Interview nicht gestellt, das vor der Behandlung des multiplikativen Rechnens geführt wurde. Welche Gründe könnte es dafür gegeben haben?
- Versuchen Sie die Vorgehensweisen der Schüler zu verstehen. Welche Denkwege erscheinen Ihnen offensichtlich, welche mehrdeutig, welche undurchsichtig?
- Gibt es Parallelen in der Entwicklung bei der Multiplikation und der Division?
- Welche Lernerfolge bzw. Rückschritte lassen sich im Verlauf der Entwicklung verzeichnen? Schreiben Sie in der Du-Form für eines der beiden Kinder einen Bericht, aus dem die Kompetenzen und Lernfortschritte, aber auch die noch verbesserungswürdigen Aspekte hervorgehen!

Achim – 8·9

10.03.
8·9=72
8+8=16 32+8=40 56+8=64
16+8=24 40+8=48 64+8=72
24+8=32 48+8=56

26.04.
8·9=72

11.05.
3) 9·9=81 8·9=72
1,2,3,4,5,6,7,8,9
8,16,24,32,40,48,56,64,72

08.06.
8·9=73 | 9·9=81, 81-8=73

Marc-André – 8·9

10.03.
8·9=88
9·8=88 8+8=16 16+8=24 24+8=32
32+8=40 40+8=48 48+8=56
64+8=72 72 80 88

26.04
8·9=72
9·9=81-9=72

11.05
8·9=72 81-9=72

08.06
8·9=72

Achim – 24 Bonbons

20.01.
(3-3-3) 24-5-5-5=4 4-2-1-1=0

10.03.
24:3=8

26.04.
8·3=24
3·8=24

11.05.
5) 24:3=8
Timo
21,18,15,12,9,6,3,0

08.06.
5) 24:3=81
21,18,15,12,9,6,3,0

Marc-André – 24 Bonbons

20.01.
24-4=20 20-4=16 16-4=12
12-2=10 10-2=8 8-2=6
6-2=4 4-2=2 2-2=0
4+4=8 Jeder kriegt 8 Bonbons

10.03.
24:3=8
0+3=3 6 9 12 15 18 21 24

26.04.
24:3=8
21
18
15
12
9
6
3
0

11.05.
24:3=8 7·3=21+1+1+1=24

08.06.
1r5 Jeder kriegt 8 Bolons.
24:3=8
8·3=24

D 12: Zahlentreppen – Zweitklässler beschreiben und begründen im Rahmen von Rechenübungen

Eine produktive Übungsform zur Addition sowie zum Einmaleins besteht darin, die folgenden Aufgabenserien zu bearbeiten (1+2+3= , 2+3+4= , 3+4+5= , usw.; sowie 3·2= , 3·3= , 3·4= , usw.).

- Rechnen Sie die vorgegebenen Aufgaben aus und setzen Sie beide Serien fort. Was fällt Ihnen auf? Begründen Sie die Auffälligkeiten auf verschiedene Arten, u. a. so, wie Zweitklässler es Ihrer Meinung nach tun würden.
- Analysieren Sie die folgenden Antworten, die Zweitklässler auf die Frage gaben, was ihnen auffiele. Inwieweit decken sich deren Beobachtungen und Begründungen mit den Ihren?

1 + 2 + 3 = 6 3 · 2 = 6
2 + 3 + 4 = 9 3 · 3 = 9
3 + 4 + 5 = 12 3 · 4 = 12
4 + 5 + 6 = 15 3 · 5 = 15

Die Dreier

Nach Der Reinfolge

Die Ergemnise sind gleich,

imer zwei mer Beidenergenisse

Achim

1 2 3 3
2 3 4 3
3 4 5 3
4 5 6 3

Bei • ist es mehr als bei +.

Das sind die gleichen egbnise.

Nina

3+3=6
5-2=3
4-1=3
2+1=3

bei den Zahlen ist immer eine Zahl mehr

es sind immer 3 mehr

die 3 ist immer gleich

In jeder reie kommt eine Zahl mehr

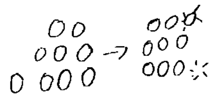
es sind immer die gleichen ergebnise

Sebastian

1 + 2 + 3 = 6 3 · 2 = 6
2 + 3 + 4 = 9 3 · 3 = 9
3 + 4 + 5 = 12 3 · 4 = 12
4 + 5 + 6 = 15 3 · 5 = 15
5 + 6 + 7 = 18 3 · 6 = 18

die beiden sind auch gleich

die Ergebnisse sind gleich



~~Die ...~~ wenn mann ein plättchen wek nimt und zu der oberen reie tut dann ist es 3 · 3

Sven

4 (10) Aufgaben sind in einer Reihe

10 Aufgaben gehn nach unten

3 Aufgaben sind einer Reihe

4 Aufgaben gehn nach unten

Ich habe noch 6 Aufgaben Da zu getan

Markus

1 + 2 + 3 = 6 3 · 2 = 6
2 + 3 + 4 = 9 3 · 3 = 9
3 + 4 + 5 = 12 3 · 4 = 12
4 + 5 + 3 = 13 3 · 5 = 15

Lega Mär tels Mir nich auf Nach Der Reie

Kiza Nach Der Reie

Daniela

- Addieren Sie 2, 4, 5, 6, 7, ... aufeinander folgende Summanden und schreiben Sie jeweils auch eine passende Malaufgabe hinzu. Was fällt Ihnen auf? Können Sie es begründen?
- Versuchen Sie nun alle Zahlen von 1 bis 30 (auf möglichst viele Weisen) als Summe aufeinanderfolgender Zahlen darzustellen. Beschreiben und begründen Sie, was Ihnen auffällt.
- Können Sie die Zahl 100 (1000) als Summe aufeinander folgender Zahlen ausdrücken? Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, finden Sie weitere (alle) Möglichkeiten!

D 13: Mündliche Division: Lina und Sebastian

1. Lina

Lina wurde in einem Interview zu Beginn des 3. Schuljahres die kontextfrei dargebotene Aufgabe 60:4 gestellt. Ihr Lösungsansatz bestand zunächst darin, eine Zahl zu suchen, deren Vierfaches 60 ergibt: Sie begann mit 20, probierte es dann mit 18 und 21 und versuchte es anschließend mit 16. An dieser Stelle setzt der folgende Gesprächsausschnitt ein.

- Überlegen Sie sich zunächst selbst verschiedene Wege, um das Ergebnis von 60:4 zu ermitteln!
- Beschreiben Sie dann die Denkstrategien von Lina bzw. der Interviewerin!
- Woran könnte es liegen, dass beide aneinander vorbeireden?
- Formulieren Sie jeweils eine Textaufgabe mit Aufteil- bzw. Verteilstruktur, die zu dem Zahlensatz 60:4 passt! Geben Sie mögliche Lösungswege von Drittklässlern (zu Beginn des Schuljahres) an!

Ähm, 16 mal ... äh, 16 mal 4 ist ... 4 Zehner sind erst mal wieder 40, dann 46 und plus 4 ... 50 ... 52 plus 6 sind 58 ... passt auch nicht.

Wieso hast denn du gerade plus 6 gesagt?

Was, wo?

Du hast gerade plus 6 gesagt. 52 plus 6 sind 58.

Ja.

Wieso 6?

Weil ich da noch einmal ... ich hatte ja 16 mal 4 gerechnet. Da musste ich noch eine 6 dazurechnen. Weil ich erst die ganzen vier Zehner gemacht habe und dann die Sechser.

Aber wenn du 16 mal 4 rechnest, sind es ja nicht 4 Sechser, sondern 6 Vierer, ne, die du dazurechnen musst. Aber du weißt ja, dass zehnmal 4 vierzig ist, hast du eben gesagt, ne?

Ja.

Und wievielmal 4 sind 20? (Lina überlegt, lacht) *Hilft dir das vielleicht?*

Wievielmal 4 Zehner oder ... ?

Zehnmal 4 sind 40.

Ja.

Und wie viel fehlen dann noch bis 60?

20.

Und wievielmal 4 sind 20?

Was? Wievielmal 4 sind 20? (leise) **8 ... 12 ... 16 ... 20.** (laut) **Ah, jetzt hab ich nicht mitgezählt, ich Doofi, ähm, mal eben zählen. Also 4, 8, 12, 16, 20** (zählt mit den Fingern die einzelnen Vierer mit) **... 5.**

Hm, und wenn du jetzt weißt, dass zehnmal 4 vierzig sind und fünfmal 4 zwanzig ist?

(nach 24 Sekunden,unsicher) **5? Nee ... oder doch ...** (nach 25 Sekunden)

Die 4 passt zehnmal in die 40 und fünfmal in die 20 ... zehnmal in die 40 und fünfmal in die 20. Und 40 und 20 ist ja 60. Wie oft passt sie dann in die 60?

Die 4 ...

Wenn sie zehnmal in die 40 passt und dann noch fünfmal dazu ...

15.

15, ne.

Hm.

---

2. Sebastian

Ebenfalls zu Beginn des 3. Schuljahres wurde Sebastian folgende Aufgabe vorgelegt: *„Mark kauft Luftballons für seinen Geburtstag. Er kauft 4 Packungen und in jeder sind gleich viele Luftballons. Insgesamt hat er 52 Stück. Wie viele sind in jeder Packung?"*

---

52 ... (flüstert) **Wie viele Packungen kauft er ...** (nach 20 Sekunden) **13.**

Woher weißt du das denn so schnell?

Ich hab erst gedacht 10, da waren's 40, und dann hab ich noch mal ... jetzt, wie hab ich's weitergemacht ... hab ich noch mal 4, glaube ich, dann waren's 44, dann noch mal 4, dann waren's 48, und dann noch mal ... hä?

Hm, könnte ja sein. ... Hast du dir immer überlegt ... hast du angefangen, wenn 10 in einer Packung wären, wären's 40 oder so?

Hm.

Und dann hast du immer noch mal einen dazu getan oder so.

Hm, glaub so.

Und dann kamst du auf 13.

Hm.

Eine andere Aufgabe lautete: „Auf einem See sind 200 Leute mit einem Ruderboot unterwegs. Insgesamt sind auf dem See 40 Ruderboote und in jedem sind gleich viele Leute. Wie viele sind in jedem Boot?" Nach etwa vier Minuten gab Sebastian seine Lösung an:

5.

Woher weißt du das denn?

Äh ... ich hab ... irgendwie ... äh ... ich hab erst mal ... nee, weiß ich nicht.

Weißt du gar nicht mehr, was du überlegt hast?

Den Anfang ... ich hab ... ich hab erst mal ... wie viele Boote waren das jetzt ...

40 Boote.

Ich hab erst mal 40 und dann noch mal die 40, das waren 80 dann, und noch mal 40, das waren 120, da hatte ich schon 3-mal ... da habe ich auch immer gezählt, wie oft ich die 40 nehme, und dann hatte ich viermal die 40 genommen ... und fünfmal, und dann kam ich auf 200.

- Entscheiden Sie für die beiden Aufgaben, ob es sich jeweils um eine Verteil- oder eine Aufteilaufgabe handelt! Begründen Sie Ihre Entscheidung!
- Wodurch unterscheiden sich die beiden Lösungswege, die Sebastian verbal angibt? Notieren Sie die Rechenwege zur Erklärung auch symbolisch-formal!
- Welche weiteren Lösungswege zu den beiden Aufgaben sind denkbar?

D 14: Mündliche Division: Annika rechnet 60:4

Zu Beginn des 3. Schuljahres wurde Annika im Rahmen eines Interviews die formal dargebotene Aufgabe 60:4 gestellt.

- Versuchen Sie Annikas Denkwege möglichst gut zu verstehen! Welche Äußerungen sind – an Erwachsenenmaßstäben gemessen – falsch, aber dennoch Ihrer Meinung nach von vernünftigen Überlegungen geleitet, welche können Sie nicht verstehen?
- An welchen Stellen werden Missverständnisse zwischen Annika und der Interviewerin offensichtlich? Was mögen die Hintergründe für die unterschiedlichen Deutungen sein?

Weißt du, wie viel 60 durch 4 ist?

60 durch 4 ... (A überlegt, murmelt unverständlich vor sich hin. Dann schreibt sie eine 12 auf das Papier; nach 1 Minute) **13.**

13? Wie bist du denn darauf gekommen?

Ich hab erst 8 durch 4 gerechnet, das waren 12, und dann hab ich die Reste davon, das war bei jedem 2, und dann hab ... und das waren dann wieder 12, und dann hab ich ...

Also, ich muss jetzt gleich mal dich unterbrechen. Du hast nämlich gesagt, 8 durch 4 ist 12. (A überlegt kurz.)

Äh, ich meine 8 durch 60.

8 durch 60 ... geht das?

... 2 mal 4 sind 8, ...

(I nickt.)

und das hab ich immer, hab ich auf jeden Fall 6-mal die 8 da, und dann bleiben nur ... und dann muss ich das doppelt rechnen, die 4 ... dann sind's bei 8 ... halt sozusagen (A schreibt eine 4.) **... nee, 2 ...** (streicht die 4 wieder durch und schreibt: $2 \cdot 4 = 8$) **Dann 8, das hab ich dann öfter gerechnet ...**

Hm, und wie weit bist du da gekommen?

Da hab ich gerechnet ... (schreibt und sagt) **$6 \cdot 8 = 6$.**

6 mal 8 gleich 6?

Nein, aber ... eher gesagt ... da hab ich (streicht $6 \cdot 8 = 6$ durch.) **... geht schwer ... da hab ich eher gesagt so gemacht, hab ich 6-mal die 8 gerechnet, und dann hab ich davon die 4, da waren 12 übrig, daraus hab ich dann noch mal 8 gemacht und 2 waren dann übrig, dann hab ich 13-mal 4 gehabt.**

Hm, aber, ähm ... 6 mal 8, wie viel ist denn 6 mal 8 ... wo bist du denn dann, wenn du 6 mal 8 hast? (A überlegt.) *Das musst du ja schon wissen, wenn du so rechnest ... oder das musst du rauskriegen können ...*

Hab ich aber dabei nicht ... gleich weitergerechnet.

Hast du gar nicht? Aber dann weißt du ja gar nicht, wie viel noch fehlt bis 60.

Da hab ich ... das war mir klar eigentlich, aber ... das hab ich eigentlich nicht gemacht ...

Also, wenn du 6 ... du hast gerechnet 6 mal 8, und dann weißt du ja auch, wievielmal 4 du hast, ne, so hab ich das verstanden (zeigt auf das Geschriebene.), *dass du erst 2 mal 4 ist 8, und dann hast du immer gleich die 8 ... mit 8 weitergerechnet, ne.*

Dann hab ich 6-mal, also die 8 so oft es geht in die 60 reingetan. (I stimmt zu.). **Und dann hab ich aus den Resten das noch mal gemacht.**

Hm, aber du solltest das vielleicht noch mal machen, denn irgendwo hast du welche vergessen.

In Durch bin ich ja auch nicht ganz grad die Beste ...

Nicht? Aber du hast das ja auch jetzt schon gar nicht mit Durch gemacht. Du hast das ja mit Mal gemacht. (nach 20 Sekunden) *Was überlegst du jetzt?*

Also, ich rechne jetzt weiter ... sozusagen ... ich rechne jetzt mit ... 6 mal 10 sind 60 ... das weiß ich ja... (schreibt und sagt dazu) **6 mal 10 sind 60. Und dann noch ... und bei 8, da fehlen ja immer 2, und dann musste ich ... dann hab ich das abgezogen, also die 2 von jedem Zehner...**

Hm, und das sind zusammen ...?

Dann hab ich rausgekriegt, dass es ... 12 ... und dann waren's 12, ja, dann 12 ... (sagt und schreibt) **12 − 8 = ...**

Wieso 12 minus 8?

Weil in der 12 stecken dann ja noch mal die 8 drin.

Ah, ja.

Und das wären 4 (A schreibt eine 4.) **... nee ...** (A überlegt.)

12 minus 8...

4 natürlich. Hab ich eben durchgestrichen. ...

(A schreibt wieder eine 4 hin.) **Und dann hatte ich noch eine 4 übrig und ... 4 übrig hatte ich ... und natürlich waren's dann 14 mal die 8, also 14 mal 4, weil ja die 2 ... weil 2 mal 8 4 sind und dann sozusagen** (A schreibt und sagt dazu) **8 − 4 = 4. Und dann hab ich das so auseinandergerechnet, und dann waren's 14.**

D 15: Mündliche Division: Verschiedene Rechenwege bei der Aufgabe 200:40

Bevor das multiplikative Rechnen jenseits der Zahlensätze des kleinen Einmaleins im Unterricht behandelt worden war, wurden Drittklässlern in Interviews entsprechende Aufgaben gestellt, unter anderem die folgende: *„Auf einem See sind 200 Leute mit dem Ruderboot unterwegs. Insgesamt sind 40 Ruderboote auf dem See und in jedem sind gleich viele Personen. Wie viele Personen sind in jedem Boot?"*.

- Bevor Sie die Transkripte analysieren, sollten sie zunächst möglichst viele verschiedene Lösungswege für diese Aufgabe finden!
- Notieren Sie dann die von den Schülern entwickelten Rechenwege in symbolischer Darstellungsform! Inwieweit stimmen sie mit den von Ihnen gefundenen überein?
- Suchen Sie nach Indizien dafür, dass sich die einzelnen Schüler beim Rechnen an einer Aufteilvorstellung bzw. an einer Verteilvorstellung orientiert haben! Geben Sie des weiteren Textstellen an, die darauf hindeuten, dass das jeweilige Kind kontextbeeinflusst bzw. kontextunabhängig denkt!

---

1. Andrea

(nach 40 Sekunden) **5.**
Woher weißt du das?
5 mal 4 sind 20 ... und dann ... und also, 4 mal 5 sind 20 und 4 mal ... nee, 5 mal 40 sind dann 20.
200.
Äh, 200, ja.

---

2. Britta

(nach 3 Minuten, 5 Sekunden) **50?**
Woher weißt du das?
Ich hab... 20 geteilt durch ... 20 geteilt durch 4, und das waren 5, dann hab ich noch 'ne Null drangehängt.
Hm ... also, wenn's 40 Boote sind und in jedem 50 Leute, ne, das war jetzt das, was du rausbekommen hast (B nickt zaghaft.) ... *Wie viele Leute wären denn das dann wohl zusammen? 40 Boote und 50 Leute?*
Das wären viel zu viel.
(nach 1 Minute, 5 Sekunden) *Hast du noch eine Idee, wie du's machen könntest? ... Aber also, wenn's 40 Boote sind, und 50 sitzen in jedem, wären's 40 mal 50 Leute, ne, das wären ja zu viel. Kannst du ja vielleicht mal gucken, wie's wäre, wenn weniger drinsitzen würden.*
(nach 1 Minute, 5 Sekunden) **25?**
Hm, wie hast du das jetzt gemacht?
Die Hälfte von fünf ... von 50.
Hm, wie wäre denn dann die Malaufgabe? Wenn's 40 Boote sind, und in jedem sitzen 25, sind das dann wohl 200? (nach 35 Sekunden) *Oder möchtest du die Nächste lieber?*
(sofort) **Ja.**

---

3. Julia

(nach 2 Minuten) **5.**
5? Woher weißt du das?
Ich hab ... ähm ... 40 und 40 sind 80, und da kommen immer 2 also erst mal in ein Boot, und dann noch mal 40 sind noch mal ... einen dazu, das sind dann 120, dann sind 3 in einem Boot, und dann noch mal 40 dazu, sind ... sind 160, und dann, das sind dann 4 Leute in einem, und dann noch mal 40 sind 200, und dann sind 5 Leute drin.

---

4. Raphael

(leise) **20 durch ... äh, 200 durch 40 ... äh, schwierige Aufgabe ...** (nach etwa 40 Sekunden) **5.**
5. *Wieso?*
Weil, also letztes Mal hatten wir ja auch was mit 600 und 30, das ist ungefähr das Gleiche ... äh, 300 und 60...
Wie, das ist ungefähr das Gleiche?
Ja, weil das auch 20 und 40, das ist auch wieder das ... 20 ist die Hälfte von 40, das ...
Ja, aber 20 ist die Hälfte von 40, und wie hast du das dann genau gerechnet?
Ich hab's wieder so gerechnet wie bei den 300 ...
Ja, das weiß ich ja jetzt gar nicht mehr so, ne ...
Ähm, ich hab erst also 20 genommen, 200 durch 20, das war 10, und durch 40, das ist ja das Doppelte, das muss ja dann 5 sein.

---

5. Sebastian

(nach etwa 4 Minuten) **5.**
Woher weißt du das denn?
Ich hab erstmal ... nee, weiß ich nicht.
Weißt du gar nicht mehr, was du überlegt hast?
Ich hab erst mal 40 und dann noch mal die 40, das waren 80 dann, und noch mal 40, das waren 120, da hatte ich schon 3 mal ... da habe ich auch immer gezählt, wie oft ich die 40 nehme, und dann hatte ich 4-mal die 40 genommen ... und 5-mal, und dann kam ich auf 200.

D 16: Mündliche Division: Janas Lösungswege zu 60 : 12

Jana rechnete in drei aufeinander folgenden Interviews drei Aufgaben, die alle zu derselben Divisionsaufgabe (60 : 12) führen.

- Beschreiben Sie zunächst die Unterschiede in den Aufgabenstellungen und formulieren Sie für 75 : 15 drei entsprechende Aufgaben. Verwenden Sie hierbei andere Kontexte!
- Beschreiben Sie die drei Lösungswege, die Jana wählt!
- Überlegen Sie, woran es liegen könnte, dass dasselbe Kind „dieselbe" Aufgabe jedes Mal anders rechnet! Warum scheint die 2. Aufgabe für Jana besonders schwierig zu sein?

---

1. INTERVIEW
(9. Dezember)

Wie viel ist 60 durch 12?
(flüstert) **1 mal 12 ... 12, 2 mal 12 ... 24, 3 mal 12 ... 36, 4 mal 12 ... 48, 5 mal 12 ... 80?** (schaut zu I) **Nee, 5 mal 12** (laut) **6 mal 12?**
6-mal 12?
Äh, ich meine 5 mal 12.
5-mal. Du hast immer 12 plus 12 gerechnet, ne? (J nickt.) *Habe ich ja gehört.*

---

2. INTERVIEW
(13. Januar)

In einer Schule werden 12 Tische für eine Weihnachtsfeier gedeckt. Thomas verteilt 60 Kerzen auf die 12 Tische, so dass auf jedem Tisch gleich viele Kerzen stehen. Wie viele Kerzen stellt er auf jeden Tisch?
(nach 2 Minuten) **6?**
Woher weißt du das?
Ich hab bei diesen Tischen geguckt, und da hab ich immer zwei auf einen erst mal und dann ... das waren dann insgesamt 10 ... dann hab ich erst mal insgesamt ... nein, keine 10 Kerzen ...
Du hast dir hier die 12 Tische ausgesucht und hast auf jeden 2 Kerzen gestellt. Wie viel hattest du dann insgesamt schon, wie viele Kerzen?
(J überlegt, wobei sich ihre Finger bewegen, als ob sie die Zweierschritte zählt.) **40.**
Wenn auf jedem Tisch 4 stehen, oder? Dann hast du 40? (J nickt und überlegt weiter.) *Also, wenn's 12 Tische sind und auf jedem stehen erst mal 2, wie viele sind's dann insgesamt?*
24.
Hm, und dann stellst du noch mal 2 dazu ...
48.
Und dann? Was machst du dann ... oder ... was hast du dann gemacht?
Ich hab mich verrechnet eben.
Wie viele sind's denn? ... Überlegst du noch, oder?
(J signalisiert, dass sie überlegt.) **5 Kerzen auf jedem Tisch?**
Und wie hast du das jetzt gemacht?
Ich hab von den 48 weitergezählt. (I nickt.) **Dann hab ich immer gemacht ... zwei, vier, sechs, acht, zehn und so weiter, aber das ging nicht, und dann hab ich das mit Einern gemacht.**

---

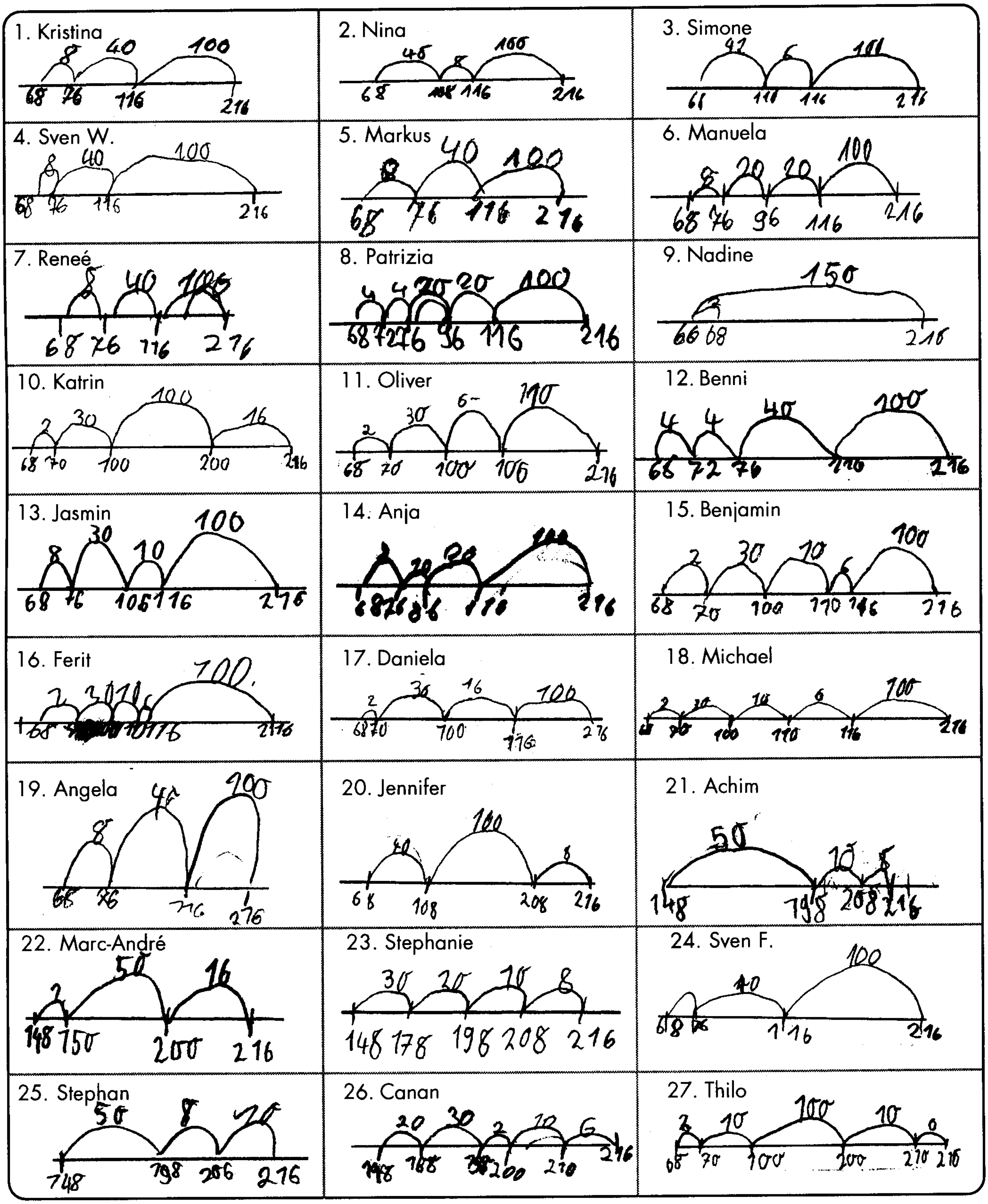
3. INTERVIEW
(3. Februar)

In einem Restaurant werden Tische gedeckt. Der Kellner verteilt 60 Teller und auf jeden Tisch stellt er 12 Teller. Wie viele Tische sind es? ... Er verteilt 60 Teller, ne, und auf jeden Tisch 12.
(nach 50 Sekunden) **5.**
Hm, woher weißt du das?
Ich hab erst ... 50 durch immer Zehner aufgeteilt, und dann hab ich jedem 2 von den letzten Zehnern dazugegeben.
Hm, und dann kamst du grad auf 60. (J nickt.)

D 17: Informelle Rechenstrategien zur Subtraktion im Tausenderraum

Vor der Behandlung der Subtraktion im Tausenderraum wurde Drittklässlern die folgende Aufgabe gestellt: *„Im Kino können 216 Personen sitzen. Es sind schon 148 da."* Die insgesamt 27 Schüler sollten ihre Vorgehensweise mit Hilfe des sog. Rechenstrichs entwickeln bzw. darstellen. Dabei handelt es sich um einen leeren Zahlenstrahl, auf dem die Kinder ihre Rechenschritte durch die Angabe der Sprungweite bzw. von (Zwischen-)Ergebnissen festhalten können.

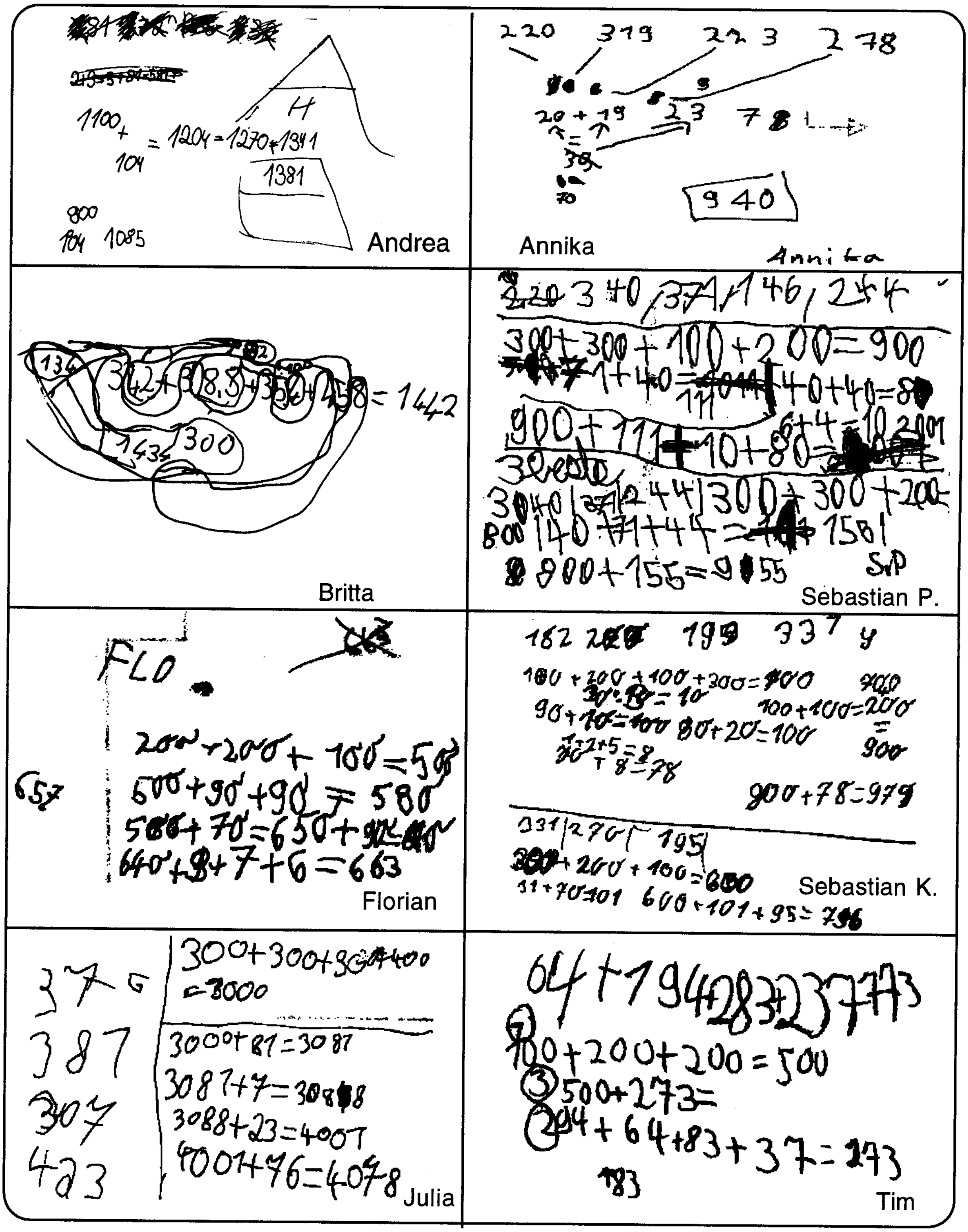
- Notieren Sie zunächst möglichst viele verschiedene Rechenwege, um die o. a. Aufgabe zu lösen!
- Analysieren Sie nun die Schülerdokumente: Welche Rechenwege wählten die Schüler?
- Ordnen Sie die Lösungen: Welche Vorgehensweisen passen zusammen? Erfinden Sie jeweils eine Überschrift für zusammengehörige Rechenwege! Inwieweit stimmen die unterschiedlichen Rechenwege mit den von Ihnen gefundenen überein?



D 18: Informelle Strategien zur Addition zu Beginn des 3. Schuljahres

Die abgedruckten Schülerdokumente geben Rechenwege von Drittklässlern wieder, die ihre Punktzahlen in den drei (vier) Disziplinen der Bundesjugendspiele addierten, bevor die Addition im Tausenderraum thematisiert wurde. Die Punktzahlen sind bei Annika, Sebastian P., Julia und Tim ersichtlich; die Punktzahlen der anderen Kinder sind: Andrea: 281, 372, 266, 432; Britta: 342, 388, 354, 458, Florian: 297, 296, 170, 93; Sebastian K.: 182, 270, 195, 331.

- Welche Rechenwege wählen die einzelnen Schüler?
- Wo liegen „Fehler" vor? Können Sie einen rationalen Kern in den „Fehllösungen" entdecken?
- Welche Rechenschritte machen für Sie keinen Sinn?
- Wo entdecken Sie innerhalb der Rechnungen Verkürzungen?
- Wie strukturieren sich die Kinder ihr Blatt?



D 19: Dennis und Sebastian bearbeiten „Kapitänsaufgaben"

In Interviews wurden Drittklässlern die folgenden Aufgaben vorgelegt.

(1) Michael ist 8 Jahre alt. Seine Mutter ist 26 Jahre älter als Michael. Wie alt ist sie?
(2) Anke ist 12 Jahre alt. Ankes Mutter ist dreimal so alt. Wie alt ist die Mutter?
(3) Ein Hirte hat 19 Schafe und 13 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?
(4) Ein 27 Jahre alter Hirte hat 25 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?
(5) In einer Klasse sind 13 Jungen und 15 Mädchen. Wie alt ist die Lehrerin?
(6) Ein Bienenzüchter hat 5 Bienenkörbe mit jeweils 80 Bienen. Wie alt ist der Bienenzüchter?

Das unten abgedruckte Transkript setzt ein, als Dennis und Sebastian gerade die vierte Aufgabe gelöst haben.

- Gliedern Sie das Transkript in Sinnabschnitte und versehen Sie diese mit prägnanten Zwischenüberschriften!
- Beschreiben Sie, was Dennis und Sebastian wohl denken, und geben Sie Belege für Ihre Deutungen!
- Versetzen Sie sich auch in die Gedankenwelt der Interviewerin: Was denkt sie vermutlich im Verlauf des Interviews? Mit welchen Mitteln versucht sie die Schüler auf die „richtige" Spur zu bringen? Inwieweit hat sie damit Erfolg?

---

1 I: *Habt Ihr beide was? ... Und mal die Rechnung? Sagst du's mal, Sebastian? Was hast du gerechnet?*
2 S: **27 plus 25 plus 10.**
3 I: *Und du?* (zu Dennis)
4 D: **Ich hab 27 minus, äh, plus 25, minus 10.**
5 I: *Minus 10?* (erstaunt)
6 D: **Ja!**
7 I: *Das musst du mir jetzt mal erklären.*
8 D: **Ich hab einfach nur so gedacht.**
9 I: *Ach, hättest du jetzt auch minus 27 schreiben können?*
10 D: **Ne!**
11 I: *Warum nicht?*
12 D: **Ja, weil das ja, das geht nicht, weil das ja hier 25 sind, da kann man nicht minus 27 rechnen.**
13 I: *Mhm, und deshalb hast du jetzt minus 10 gerechnet?*
14 D: **Ja!**
15 I: *Wenn du dir die Aufgabe einmal durchliest. Lies mir noch mal den ersten Teil vor.*
16 D: **Ein 27 Jahre alter Hirte.**
17 I: *Und du?* (zu Sebastian)
18 S: **Ein 27 Jahre alter Hirte.**
19 I: *Und wie heißt die Frage, ganz kurz noch? Lies mal die Frage vor.*
20 S: **25 Schafe.**
21 I: *Ne, hier fängt die an!*
22 S: **Wie alt ist der Hirte?**
23 I: *Fällt euch da was auf? ... Denkt noch mal an den ersten Teil!*
24 S: **Mh, ich weiß es. Ein 27 Jahre alter Hirte, da muss man die 25 noch dazuzählen, und die 10 Ziegen, die laufen ja nicht weg!**
25 I: *Die laufen nicht weg?*
26 D: **Ne, hab ich ja geschrieben!**
27 I: *Und was musst du da rechnen?*
28 S: **27 plus 25 plus die 10.**
29 I: *Weil die Ziegen nicht weglaufen?*
30 S: **Ja.**
31 I: *Und was meinst du?* (zu Dennis)
32 D: **Die laufen weg!** (lächelnd)
33 I: *Bei dir laufen sie weg, ne! ...*
34 D: **Der passt da nicht drauf auf!**

35 I: *Ja, das stimmt. Pass auf, jetzt machen wir das noch einmal. ... Liest du mal hier die Frage vor, Sebastian?*

36 S: **Wie alt ist der Hirte?**

37 I: *Liest du den ersten Teil mal vor?* (zu Dennis; deckt bis auf die ersten Worte den Text mit der Hand ab)

38 D: **Ein 27 Jahre alter Hirte.**

39 I: *Fällt euch da gar nichts auf, sonst, wenn man die Schafe und die Ziegen einfach mal weglässt? ... Was heißt das denn bis hier hin, dieser Satz?*

40 D: **Dass der Hirte 27 Jahre alt ist.**

41 I: *Und wie heißt die Frage?*

42 D: **Hier die?**

43 I: *Da ist die Frage.*

44 D: **Wie alt ist der Hirte? Das ist vielleicht gelogen?**

45 I: *Das ist vielleicht gelogen.*

46 S: **Der ist vielleicht 27 Jahre.**

47 I: *Und wie kommst du jetzt darauf?*

48 S: **Vielleicht zählt der Satz nicht mit!**

49 I: *Mhm* (zustimmend) *... Was meinst du, Dennis?*

50 D: **Vielleicht zählt der Satz doch mit, oder auch nicht. Weiß ja nicht.**

51 I: *Aber das ist schon gar nicht schlecht, was der Sebastian gesagt hat ... Was würdest du dann für eine Antwort schreiben? Wenn du jetzt antworten müsstest „Wie alt ist der Hirte"?*

52 S: **27.**

53 I: *Und warum jetzt 27?*

54 S: **Weil vielleicht der erste Satz nicht mitzählt.**

55 I: *Ja, und in dem ersten Satz, was steht da drin?*

56 S: **Ein 27 Jahre alter Hirte ...**

57 I: *Ja, und was ist das?*

58 S: **... hat 25 Schafe.**

59 I: *Ja, das ist aber die Antwort dann schon auf die Frage, ne?*

60 S: **Der Satz zählt nicht mit!**

61 I: *Genau, der zählt nicht mit. Ist gar nicht so schwer, da brauchte man gar nicht bei zu rechnen, bei dieser Aufgabe, wenn man sich das gut durchgelesen hat ... Hast du's auch verstanden?* (zu Dennis)

62 D: **Ne!**

63 I: *Kannst du ihm das noch mal erklären?*

64 S: **Der Satz zählt nicht mit, Dennis.**

65 I: *Lies dir das noch mal so durch, den ersten Teil, bis hierhin, den du gerade so vorgelesen hast!*

66 D: **Ein 27 Jahre alter Hirte.**

67 I: *Was heißt das?*

68 D: **Ja, dass er halt 27 Jahre alt ist.**

69 I: *Ja, und die Frage ist: „Wie alt ist der Hirte?". Hast du es verstanden?*

70 D: **Ja, aber das steht ja da oben schon.**

71 I: *Ja, und steht nur noch dabei, dass der Hirte 25 Schafe und 10 Ziegen hat. Die kann er doch trotzdem haben, auch wenn er 27 Jahre alt ist, oder nicht?*

72 D: (zuckt mit den Schultern)

73 I: *Weißt du nicht?*

74 D: **Ne!**

D 20: Zahlenketten – Vorgehensweisen von Drittklässlern

Eine *Zahlenkette* wird wie folgt gebildet: Man wähle zwei *Startzahlen*, schreibe sie nebeneinander hin und notiere rechts daneben deren Summe. Daneben vermerke man die Summe aus der 2. und der 3. Zahl als 4. Zahl. Zum Schluss addiere man die 3. und die 4. Zahl und schreibe das Ergebnis als *Zielzahl* rechts daneben, also z.B.
2 10 12 22 34 oder 8 4 12 16 28.

1. Arbeiten Sie das Problem zunächst selbst gründlich durch, indem Sie sich mit den folgenden Problemstellungen befassen.
- Wie wirkt sich eine Vertauschung der beiden Startzahlen aus?
- Welche Zielzahl erhält man, wenn beide Startzahlen gleich sind?
- Wie ändert sich die Zielzahl, wenn man beide Startzahlen um 1, 2, 3, ... erhöht (vermindert)?
- Wie viele verschiedene Startzahl-Pärchen gibt es, die zur Zielzahl 100 führen?
- Kann man jede beliebige positive Zielzahl erreichen?

2. Versuchen Sie dann die Vorgehensweisen der Drittklässler zu verstehen! Wo liegt Ihrer Meinung nach bloßes „Versuch-Irrtum"-Denken vor, wo strategisches Vorgehen? Begründen Sie Ihre Einschätzung!

3. Übertragen Sie die oben angeführten Fragestellungen von Fünferketten auf solche mit 4, 6, 7, ... n Gliedern! Verwenden Sie ggf. auch andere Zielzahlen als 100!

Pinar

50	0	50	50	100
47	2	49	51	100
44	4	48	52	100
41	6	47	53	100
38	8	46	54	100
35	10	45	55	100
32	12	44	56	100
29	14	43	57	100
26	16	42	58	100
23	18	41	59	100
20	20	40	60	100
17	22	38	61	100
14	24	38	62	100
11	26	37	63	100
8	28	36	64	100
5	30	35	65	100
2	32	34	68	100

Peter

30	60	90	150	240
6	50	56	106	262
80	20	100	120	220
100	100	200	300	500
43	7	50	57	107
20	20	40	60	100
22	22	44	66	110
60	20	80	100	180
15	15	30	45	75
77	13	90	103	193
1	1	2	3	5
200	600	800	1400	2200
500	500	1000	1500	2500
70	10	80	90	120
12	12	24	36	60
12	28	40	68	108
12	26	38	64	102
11	29	36	67	07

Tim

30	20	50	70	120
20	10	30	40	70
30	20	50	70	120
40	20	60	80	140
30	30	60	90	150
20	20	40	60	100
40	10	50	60	110
30	10	40	50	10
30	20	50	70	120
10	20	30	50	80
10	30	40	70	110
30	30	60	90	150
10	10	20	30	50
20	10	30	40	60
30	10	40	50	90
40	10	50	60	110
28	12	40	52	92
30	14	44	58	102
30	12	42	54	96
31	12	43	55	98
32	12	44	56	100
33	10	43	53	96
35	10	45	55	100
33	11	44	55	99
33	12	45	57	102
50	0	50	50	100

Julia

$\boxed{14}$	$\boxed{26}$	$\boxed{40}$	$\boxed{66}$	$\boxed{106}$
3	9	12	21	33
13	21	34	55	89
14	22	36	58	94
15	23	38	61	99
16	23	39	62	101
14	24	38	62	100
12	26	38	64	102

Christina

$\boxed{10}$	$\boxed{25}$	$\boxed{35}$	$\boxed{60}$	$\boxed{85}$
9	10	19	29	48
25	30	55	85	140
19	10	29	39	68
40	20	60	80	140
50	15	65	80	145
50	0	50	50	100
20	20	40	60	100
-10	40	30	70	100
30	20	50	70	120

D 21: Zum Rechnen mit Nummern

Mit Kindern eines dritten Schuljahres wurden Interviews durchgeführt, die Aufgaben mit Nummern enthielten: Nummern der Tage eines Monats, Seitenzahlen eines Buches usw. Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen Gelegenheit geben, einige Besonderheiten dieser Aufgaben sowie der Reaktionen von Kindern darauf näher kennen zu lernen.

Aufgabe 1

Die 3. Aufgabe des Interviews lautete wie folgt: *„In diesem Schuljahr haben unsere Herbstferien am 4. Oktober angefangen. Das war der erste Ferientag. Die Ferien dauerten bis zum 7. Oktober. Dieser war der letzte Ferientag. Wie viele Ferientage sind das?"* Nachfolgend sind drei Anfänge von Gesprächen über diese Aufgabe wiedergegeben:

Johanna
3.
Hm ... wie bist du darauf gekommen?
Ich hab einfach ... gerechnet ... 7 minus wie viel ist gleich 4.

Jennifer
3.
Wie hast du das gemacht?
Von 4 bis 7 sind das 3, und dann hab ich erst mal bis 5 die 6 und dann bis 7.

Alexander
(nach ca. 5 Sekunden) **3.**
Wie hast du das gemacht?
Weil 4 plus 3 sind 7.

---

a) Die Antwort, die die Interviewerin gerne gehört hätte, wäre natürlich „4" gewesen. Für die Antwort „3" sehen wir zwei mögliche Erklärungen. Welche sehen Sie?
b) Angenommen, Sie wollten den weiteren Gesprächsverlauf so gestalten, dass die Kinder möglichst selbständig zu der Lösung gelangen, die die Interviewerin im Sinn hatte. Wie würden Sie vorgehen?
c) Überlegen Sie sich andere Aufgaben zum Rechnen mit Nummern, die eine ähnliche oder andere Schwierigkeit beinhalten!

Aufgabe 2

Die 5. Aufgabe des Interviews lautete wie folgt: *„Peter hat ein neues Buch geschenkt bekommen. In diesem Buch stehen mehrere Geschichten. Peter liest heute abend in seinem Buch vom Beginn der Seite 13, also von oben, bis zum Ende der Seite 23, also unten. Wie viele Seiten hat er heute gelesen?"*

Nachfolgend sind zwei Anfänge von Gesprächen über diese Aufgabe wiedergegeben:
a) Welchen Fehler macht Jennifer zunächst? In welchen Konflikt gerät sie zum Schluss? Wie würden Sie als Interviewerin fortfahren?
b) Haben Sie eine Erklärung für die Argumentation von Dennis?

Jennifer
(nach ca. 5 Sekunden) **10.**
Wie hast du das gemacht?
13 plus 5, das wären 18, und dann bis 23 wären das dann noch mal 5 und dann hab ich also rausgekriegt, dass das 10 sind.
Genau ... und wenn du jetzt von oben auf Seite 13 bis unten auf Seite 15 liest?
Sind 2 Seiten.
Und von oben auf Seite 13 bis unten auf Seite 14?
Das sind 2.
Hm (erstaunt.)
Äh ich meine eine (lacht unsicher).

Dennis
(nach ca. 13 Sekunden) **12?**
Wie bist du da jetzt drauf gekommen?
Ich hab bei der 13 plus 7 das sind 20 ... dann plus 3.
Mhm ... das 12?
(D flüstert etwas, unter anderem 7 oder 4)
Wenn du 13 plus 7 das sind 20 ... hast du gesagt hast du gerechnet und dann plus 3.
Das ist 10 (kann auch „mal sehen" heißen) – **ich hab jetzt aber mit den beiden gerechnet** (zeigt auf die Zahlen in der Aufgabenkarte).

Aufgabe 3

Christoph erhielt folgende Aufgabe: *„Im letzten Monat belegte das Buch ‚Pelle zieht aus' den 9. Platz in der Hitliste. In diesem Monat verbesserte es sich auf den 4. Platz. Um wie viele Plätze verbesserte sich das Buch?"* Christophs Antwort lautete: „Um 6 Plätze." Zur Begründung gab er an, er habe die 9 erst gar nicht dazugezählt. Wie würden Sie dieses Ergebnis und seine Begründung kommentieren?

Aufgabe 4

Romina bekam die folgende Aufgabe gestellt: *„Stell dir mal vor, alle Kinder der Klasse stehen nebeneinander und Ina ist das 12. Kind von links und gleichzeitig das 15. Kind von rechts. Wie viele Kinder hat die Klasse?"*

a) Wie erklären Sie sich, dass Rominas erstes Ergebnis und ihre Begründung nicht zusammenpassen?
b) Was bezweckt die Interviewerin mit dem Einsatz der Gummibärchenschachtel?
c) Welches ist das mathematische Problem, das in Rominas Bemerkung „Ein Kind kann man ja nicht durchschneiden" zum Ausdruck kommt?
d) Für welche Stellen des Gespräches haben Sie Vorschläge für ein anderes Verhalten der Interviewerin?

(schnell) **27.**

Hm ... wie bist du drauf gekommen?

Weil dieses Mädchen ist ja ... erst mal das 12. Kind von der linken Seite, (hält ihren Zeigefinger mittig auf die Tischkante) **und dann muss man nur noch ... die anderen 14** (deutet Bewegung von links bis zu ihrem Finger an) **da also ... da muss man die 2 zusammenrechnen, die 2 Seiten** (bewegt beide Hände parallel zur Tischkante aufeinander zu).

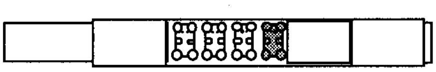
Hm.

(nach ein paar Sekunden) **Also die Kinder ... die mit den Reihen.**

Ja ... du hast grad gesagt, die anderen 14, und dann hast du von vorne angefangen weiterzureden. Wie bist du denn auf 14 gekommen?

Ja, weil sie ja gleichzeitig das 15. Kind von der rechten Seite ist.

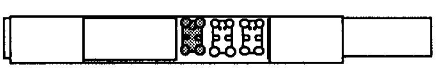
Mhm ... gucken wir uns das mal mit ein paar weniger an ... und zwar hab ich dir Gummibärchen mitgebracht, die sind da drunter. Und jetzt sag mir mal ... (holt währenddessen die Gummibärchenschachtel und schiebt zuerst die linke Seite auf),



das wievielte Gummibärchen ist das rote von links?

Das 4.

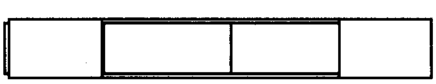
Hm ... Jetzt mach ich da wieder zu ... (verschiebt die Öffnung zur anderen Seite)



so ... nur bis dahin ... und das wievielte Gummibärchen ist das rote von rechts?

Das 3.

Aha ... (schließt nun beide Klappen) *und dann ... sagst du mir mal ...*



wie viel Gummibärchen da drunter sind?

7.

Hm ... gucken wir mal nach ... (öffnet nun beide Klappen der Schachtel)

... Schade kriegst eins weniger, ne.

(lacht kurz) **Mhm!**

Hm ... aber du hast grad gesagt, bevor du dann noch mal angefangen hast, anders zu erklären, du musst die 14, die neben ihr stehen, noch dazurechnen? ... Die rechts neben ihr stehen ... bei der Aufgabe (deutet auf die Aufgabenkarte) *... war das vielleicht doch gar nicht falsch? ... Sollen wir das mal ausprobieren?* (holt die Halmakegel) *... du hast gesagt 27 Kinder sind's, ne?*

Mhm.

Das sind jetzt genau 27 ... hab ich extra zu Hause nachgezählt ... und wenn du jetzt versuchst 'ne Reihe zu legen, wo halt ... die Ina das gelbe ... das gelbe Dings die Ina ist ... die 12. und die 15. ist. ... Wenn du das mal versuchst, das hinzulegen, dass das genau passt, dass sie das 12. ... also dass dieser ... ähm ... Stein der 12. von ... der gelbe der 12. von links und der 15. von rechts ist.

(führt dieses aus, indem sie zuerst den gelben Kegel aufstellt, dann die Reihe nach links fortsetzt und im dritten Schritt die Kegel rechts des gelben ergänzt, so dass folgende Reihe entsteht)

Hm. (kippt den übrig gebliebenen Kegel aus der Schachtel) *... jetzt ist einer übrig geblieben, ne?... Kannst du dir das irgendwie erklären? Dass du hier 7 raushattest* (zeigt auf die Gummibärchen), *... und es sind 6. Und 7 hattest du raus, weil du ... 4 plus 3 gerechnet hast, ne? Und hier hast du 12 plus 15 gerechnet, ist 27, und es sind nur 26?* (zeigt auf die Kegelreihe)

Ähm ... weil vorher hab ich die ... den einen von den 14 noch dazugerechnet, und das geht ja nicht weil ein Kind kann ja nicht ... kann man ja nicht durchschneiden, dass es 2 Hälften ist! (deutet mit der Handfläche eine Schnittbewegung an und führt dann beide Hände im Bogen auseinander, simuliert also eine Teilungsbewegung)

Mhm.

Also dass es für 2 Zahlen dabei ist.

Gut!

D 22: Viertklässler bearbeiten „Probleme der Woche"

Vom ersten Schuljahr an sollten im Mathematikunterricht auch sog. Knobel-Textaufgaben behandelt werden, bei denen anzuwendende Rechenoperationen den Schülern nicht bereits vor dem Lesen des Textes (oder nach dem Lesen desselben ohne nähere inhaltliche Betrachtung) bekannt sind. Im Weiteren sollen Sie die unten abgedruckten Lösungen von Viertklässlern zu zwei solcher Knobel-Textaufgaben analysieren.

- Lösen Sie zunächst beide Aufgaben auf mindestens drei verschiedene Arten!
- Beschreiben Sie dann die Rechenwege der Schüler und geben Sie mögliche Gründe für deren Vorgehen an!
- Wie könnten die beiden Aufgaben variiert werden, um „leistungsstarke" und „leistungsschwache" Schüler zu fördern und zu fordern?

Die „Hühner- und Kaninchenaufgabe" lautete: „Ein Bauer hat Hühner und Kaninchen. Zusammen haben die Tiere 50 Köpfe und 140 Füße. Wie viele Hühner und wie viele Kaninchen hat der Bauer?"

Wenn die Tiere alle zwei Beine hätten und es 140 Beine zusammen wären hätten sie 70 Köpfe den 140:2=70

Aber da es ja 50 Köpfe sind aber dafür Kaninchen mit 4 Beinen und Hühner mit 2 Beinen rechne ich 70-50=20 noch mit zwei Beinen

20 Beinpaare bleiben übrig diese tue ich zu zwanzig anderen Beinpaaren damit habe ich 20 Kaninchen herausgerechnet

30 Hühner bleiben übrig also sind es

30 Hühner und 20 Kaninchen!

Malte

Es ist ganz verschieden es können 25 Hüner und 25 Kaninchen sein mit je 70 ~~Beine~~ Beinen aber auch 30 Hüner und 20 Kaninchen sein.

Julia

erklärung: Zuerst habe ich 25·4 u. 25·2 gerechnet Danach 23·4 u. 27·2. Danach 22·4 u. 28·2, und zuletzt 20·4 u. 30·2. Und da kam ich auf das ergebnis 20 Kaninchen und 30 Hühner

Sarah

Frage: Wieviel Köpfe und Füße sind es insgesamt?

Rechnung:
140
+ 50
190

Antwort: Der Bauer hat 190 Füße und Köpfe insgesamt.

Timo

Die „Eichhörnchenaufgabe" lautete: „Ein Eichhörnchen begann am Montag Nüsse zu sammeln. Am Dienstag sammelte es drei Nüsse mehr als am Montag. Am Mittwoch sammelte es drei Nüsse mehr als am Dienstag. Am Donnerstag sammelte es drei Nüsse mehr als am Mittwoch. Am Freitag sammelte es drei Nüsse mehr als am Donnerstag. Am Freitagabend hatte es 50 Nüsse. Wie viele Nüsse hat das Eichhörnchen an den einzelnen Tagen gesammelt?"

Frage: Wieviel Nüsse hat es an den verschiedenen Tagen

Rechnung: Ich probierte von 0 aus immer +3 u. 50 zu erreichen (immer in 5 Schritten) bei 4 lautete mein Ergebnis: 4

4+3=7 4+7+10+13+16
7+3=10 =50
10+3=13
13+3=16

Also hat es am Montag 4 Nüsse am Dienstag 7 Nüsse, am Mittwoch 10 Nüsse, am Donnerstag 13 Nüsse, 16 Nüsse. Wenn es am Freitag keine Nüsse sammelt geht das ganze mit 5 am Anfang

Henning

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50

am Montag	Dienstag	Mittwoch
38	41	44
Donnerstag	**Freitag**	
47	50	

Mareike

Wieviel Nüsse hat das Eichhörnchen an jedem Tag gesammelt

3N
+ 3N
+ 3N
+ 3N
12N

50N
− 12N
38N

Das Eichhörnchen hat am Montag 38 N gesammelt

Marian

① Zuerst habe ich:
2
5
8
11
+13
39 gerechnet

② Und weil das Ergebnis nicht stimmte habe ich:
3
6
9
12
+15
45

③ Zuletzt habe ich:
4
7
10
13
16
50 gerechnet

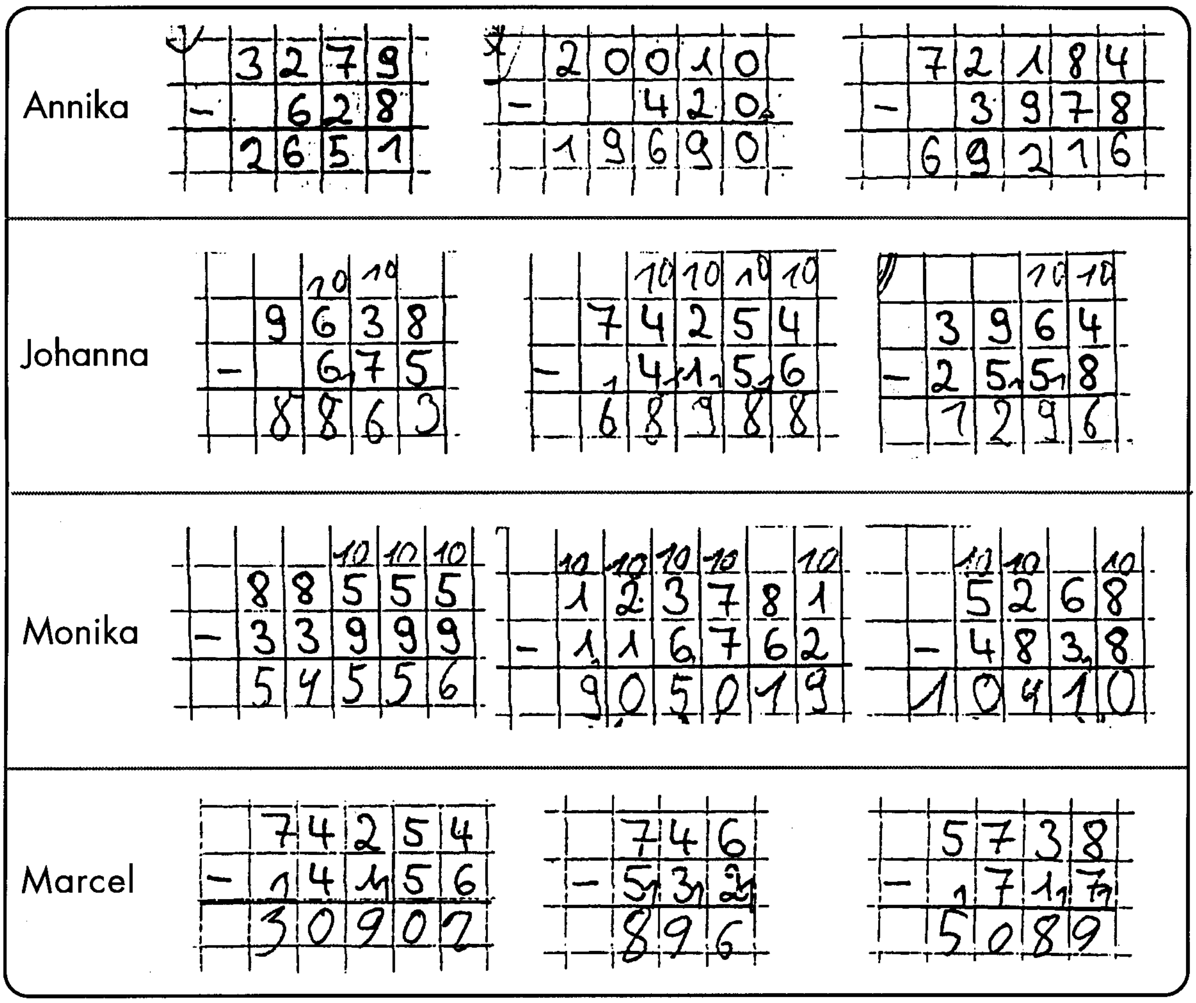
Ergebnis: Mo. 4, Die. 7, Mi. 10, Do. 13, Fr. 16
Das ergab 50 Nüsse.

Laura

D 23: Fehleranalysen bei der schriftlichen Subtraktion

Die unten abgedruckten Dokumente von Kindern des 4. Schuljahres stammen aus einem Rechentest, der Aufgaben zur schriftlichen Subtraktion enthielt und der etwa ein Jahr nach deren Einführung geschrieben wurde. Dabei wurden Beispiele von vier Schülern ausgewählt, die überwiegend fehlerhaft sind.

- Bevor Sie die Aufgaben bearbeiten, sollten Sie sich über die verschiedenen Arten der schriftlichen Subtraktion (Übertragstechniken: Erweitern, Borgen, Auffüllen; Rechenrichtungen: Abziehen, Ergänzen) informieren.
- Analysieren Sie dann die Rechenwege und versuchen Sie die jeweilige falsche, aber durchaus regelhafte Vorgehensweise zu erkennen! Beschreiben Sie das Fehlermuster in wenigen kurzen Sätzen! Geben Sie auch mögliche Gründe für die Denkweisen der Kinder an!



- Lösen Sie nun die folgenden Aufgaben in der Weise, wie sie von den entsprechenden Kindern mit ihren individuellen Fehlerstrategien bearbeitet worden wären.

a) Annika

9638	60107	51365
− 675	− 309	− 9385

b) Johanna

5437	5643	8973
− 2091	−4295	−8085

c) Monika

51365	43362
− 9385	−42974

d) Marcel

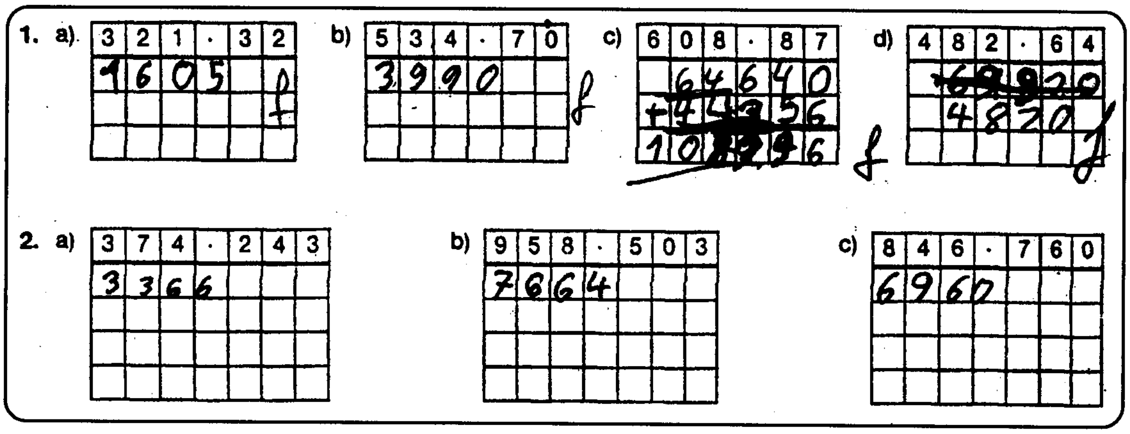
5643	43362	3279
− 4295	−42974	−628

- Welche weiteren Fehlermuster zur schriftlichen Subtraktion kennen Sie oder können Sie sich vorstellen? Illustrieren Sie diese jeweils an mehreren Beispielen!

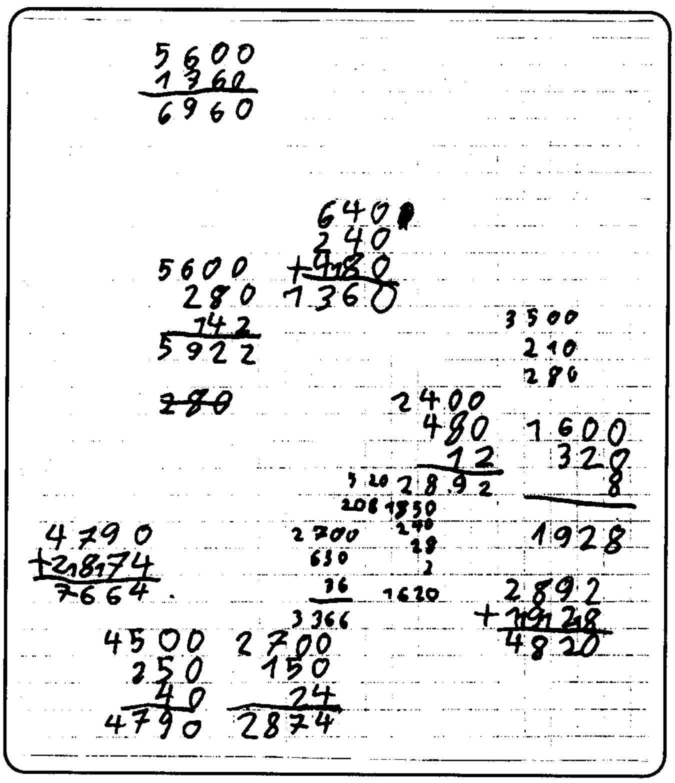
D 24: Fehlermuster bei der schriftlichen Multiplikation

Im Folgenden wird ein Ausschnitt aus einer Klassenarbeit abgedruckt, der Marcels Resultate bei Aufgaben zur schriftlichen Multiplikation wiedergibt.

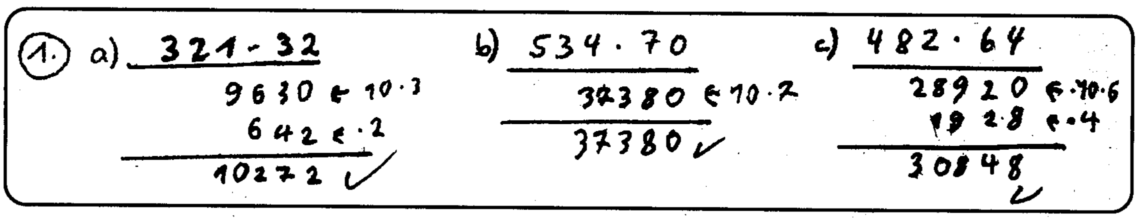
- Versuchen Sie zunächst – allerdings ohne zu viel Zeit darauf zu verwenden – ohne Kenntnisnahme der Nebenrechnungen herauszufinden, wie die Ergebnisse zu erklären sind.



- Mit Hilfe der Nebenrechnungen kann man feststellen, dass für fast alle Aufgaben erklärbar ist, wie Marcel zu seinen Ergebnissen gekommen ist. Ordnen Sie die Nebenrechnungen den einzelnen Aufgaben zu und versuchen Sie zu erklären, wie er vermutlich gerechnet hat.



- Es folgt der Auszug aus einer Klassenarbeit Marcels ein Vierteljahr zuvor. Vergleichen Sie diesen mit dem Ausschnitt aus der obigen Klassenarbeit.



D 25: Schwierigkeiten beim Erklären der schriftlichen Division

In einem vierten Schuljahr wurde die schriftliche Division nicht im Klassenverband, sondern in Dreier- oder Vierergruppen in Form von Lehr-/Lerngesprächen „eingeführt". Im Folgenden sind drei Transkriptausschnitte abgedruckt, die die gemeinsamen Anstrengungen der Schüler und der Lehrerin wiedergeben, sich der durch die Lehrpläne verbindlich vorgeschriebenen Endform zu nähern.

Aufgabe 1: Lesen Sie das Transkript aus der Gruppenarbeit mit Lucy und Sebastian, das an der Stelle einsetzt, als die erste Teildivision durchgeführt und der übrig bleibende Tausender ermittelt worden war. Beschreiben Sie die unterschiedlichen Denkweisen der Lehrerin und der beiden Schüler! Arbeiten Sie heraus, warum das Gespräch scheitert.

```
T H Z E            T H Z E
4 2 8 7  :  3  =   1
3
1
```

L: *1 Tausender, den schreibst du dann da mal hin. So, und den einen Tausender kann man als Tausender gar nicht mehr durch 3 teilen. In was wandelst du ihn dann um?*

Seb: **In 333!**

L: *Was?*

Luc: **333 kommt da hin ... nein ... doch ...**

L: *Jetzt guckt mal hier. Den einen Tausender ...*

Luc: **... geteilt durch 3 sind 333 ... Rest 1!**

L: *Aber wir haben ja einen Tausender. Was wird damit gemacht? Als Tausender kannst du ihn nicht durch 3 teilen.*

Luc: **Doch!**

L: *Als Tausender? Ein Tausender?*

Seb: **Klar, mit Rest.**

Luc: **Mit Rest. Oder sollen wir erst mal ohne Rest?**

L: *Hm!*

Luc: **Das geht doch gar nicht!**

L: *In was wandelt man denn dann den Tausender um?*

Seb: **In 3 Tausender!**

Luc: **In einen 999er!**

Aufgabe 2: Intention des nachfolgend wiedergegebenen Gesprächs mit Andrea, Britta und Lina war es, anhand der Aufgabe 966:3 Kenntnis und Verständnis des Vorgehens beim schriftlichen Divisionsalgorithmus zu festigen. Zu Ende des Gespräches stand Folgendes auf dem Papier:

```
H Z E            H Z E
9 9 6  :  3  =   3 2 2
9
  6
  6
    6
    6
```

Analysieren Sie den folgenden Transkriptausschnitt daraufhin, inwieweit die drei Schülerinnen Ihrer Meinung nach den Algorithmus und insbesondere die mit ihm verbundene Schreibweise verstanden haben.

L: *Schreibt die Aufgabe noch einmal alle auf!*

And: **Strich drunter?**

L: *Nein! Schreibt die Stellentafel auch hin! 900 durch 3 sind ... ?*

Lin: **3!**

L: *9 Hunderter durch 3 sind 3 Hunderter. Also 3 hinschreiben bei den Hundertern. 3 Hunderter mal 3 sind 9 Hunderter.* (Sie zeigt mit den Fingern.) *Schreibt die 9 mal hin.*

And: **Wieso denn das?**
L: *Unter die 9!*
And: **Da kann man gleich die Probe mitrechnen!**
L: *Jetzt geht es weiter. 60:3 sind ... ?*
Brit: **2 ... ! 2 mal 3 sind 6.** (L zeigt gleichzeitig dabei mit dem Finger.)
Lin: **2 Zehner mal 3 sind 6 Zehner.**
L: *Schreibt mal hin!*
And: **Nur das Ergebnis oder die ganze Aufgabe?**
L: *Schreib mal die 6 dahin.* (Sie zeigt auf die Divisionsstaffel.) *Jetzt ein Strich, und jetzt teilen wir die 6 Einer. Die 6 unten hinschreiben.* (Sie zeigt auf die 6 Einer.) *6 Einer durch 3 sind 2 Einer.*
And: **2 mal 3 sind 6.** (L zeigt dabei.)
L: *Dahin schreiben!* (Sie zeigt es.)
And: **Aber warum ist das jetzt hier alles doppelt? Muss dann hier nicht noch eine 9 hin? Die sind doch auch alle doppelt, warum muss die 9 nicht doppelt?**
L: *Da steht sie doch!*

Aufgabe 3:

Die mündlichen und die schriftlichen Äußerungen von Schülern geben in der Regel gute Hinweise auf ihre Gedankengänge, spiegeln diese jedoch häufig nicht vollständig wider. Vieles von dem, was Schüler denken, bleibt aus verschiedenen Gründen ungesagt. Versuchen Sie im Folgenden sich möglichst gut in Britta hineinzuversetzen und einen kleinen Text über ihre geäußerten und ihre nicht geäußerten Gedanken in der Ichform zu verfassen, der ihre Bemühungen wiedergibt, die (vermutete) Antworterwartung der Lehrerin zu erfüllen.

Die Aufgabe 9332:4 wird während des Gesprächsausschnitts wie folgt schriftlich fixiert:

```
T H Z E            T H Z E
9 3 3 2  :  4  =   2 3
8
1 3
1 2
```

Bri: **9 Tausender geteilt durch 4. Soll ich dann die 4 mal was? Ach, was rechne ich denn überhaupt?**
L: *Wie oft geht die 4 in die 9?*
Bri: **2, und einer bleibt natürlich mal wieder übrig. 2 schreib ich hin.** (Sie will den Rest auch gleich hin schreiben.)
L: *Machen wir erst mal die Probe!*
Bri: **Ach, die vergesse ich immer!** (Sie schreibt die 8 hin und macht einen Strich darunter.)
L: *Schreib die 1 mal genau darunter ... 1 Tausender sind wie viele Hunderter?*
Bri: **10!**
L: *Und hier hast du noch?* (Sie zeigt auf den Dividenden.)
Bri: **3 ... 13 Hunderter?**
L: *Ja, schreib erst mal hin.*
Bri: **Wohin?**
L: *Was hast du denn aufgeteilt?*
Bri: (Sie schreibt die 3 als 2. Quotientenziffer.) **3 mal 4 sind 12. Bleibt wieder einer über! ... Hierhin?** (Sie will die 1 unter die 13 in der Divisionsstaffel schreiben.)
L: *Nee! du musst das Ergebnis von der Probe erst noch hierhin schreiben.*
(Britta schreibt 12 hin.) *Jetzt machst du den Strich darunter. Wie viel bleibt jetzt noch übrig?*
Bri: **Soll ich wieder genau darunter schreiben?**

D 26: Zum Rechnen mit der Null

Aufgabe 1: Welche Ergebnisse haben die folgenden Aufgaben?

$5+0$ $0+0$ $5-0$ $0-5$ $0\cdot 5$ $5\cdot 0$ $15\cdot 3\cdot 0$ $5:0$ $0:5$ $0:0$

Kann man – und wenn ja, wie – Grundschülern helfen, zu begründeten Einsichten über die Resultate zu gelangen?

Aufgabe 2: Nachfolgend sind Schülerreaktionen auf Aufgaben der Art $x\cdot 0$ bzw. $0\cdot x$ wiedergegeben. Die Schüler benutzen unterschiedliche Arten von Argumenten, mit Hilfe derer sie das Ergebnis begründen. Welche Arten von Argumenten können Sie unterscheiden?

- Michael: **Wenn vor und hinter der Aufgabe eine 0 steht, dann kann man die nicht ausrechnen, dann ist es immer 0.**
- Susanne: **45 · 0, das geht ja nicht.**
- Lisette: **Weil man z.B. keinmal die 7 rechnet. 1 · 7 ist 7, weil man das einmal rechnet. Aber 0 · 7 ist 0, weil man das nicht rechnet sozusagen.**
- Jenny: **Weil 1 · 7 sieben ist, kann 0 · 7 nicht 7 sein.**
- Jana 1: **Ja klar, wenn man 7 Nullen zusammentut ...**
- Jana 2: **Also, bei der 0 wird die Zahl nicht vergrößert. Wenn man dann 0 · 10 nimmt, dann heißt es ja sozusagen die 10 nullmal und nullmal heißt: überhaupt nicht, gar nicht, und dann ist es 0.**
- Alexander: **Ist nur bei „mal" so, dass die 0 Oberhand hat zu den anderen.**

Aufgabe 3: Bei Untersuchungen, die gegen Ende des 4. Schuljahres in verschiedenen Schulen durchführt wurden, wurde bei der Aufgabe $15\cdot 3\cdot 0$ eine Fehlerquote von 87,4 % beobachtet. Lesen Sie die folgenden Schülerzitate und versuchen Sie zu erkennen und zu erklären, was die Aufgabe $15\cdot 3\cdot 0$ so schwierig macht.

- Michael: **15 · 3, da rechnen wir erst 15 · 3, das sind dann 45, und 45 · 0, das geht dann nicht. Da schreiben wir die 0 nicht dahin und schreiben nur 45 hin ... Nämlich bei zwei das geht nicht, weil 7 · 0, das ergibt kein Ergebnis, und 13, ne, ich mein 15 · 3, das ergibt ein Ergebnis, das ist nämlich 45, und dann schreibt man am meisten dahinter 45 und dann lässt man die 0 weg.**
- Susanne: **Man kann sich die hier einfach wegdenken ... Mit der Null kann man eben nicht so rechnen, wie mit zwei ... 15 · 3 oder wer weiß was.**
- Christoph: **Weil das mit der 0 verwirrt ein bisschen, genau genommen könnte man das auch weg lassen ... Weil die Zahl dann länger erscheint.**
- Lisette: **Dann braucht man eigentlich nicht mit 0 zu rechnen. ... Da braucht man nicht mehr 45 · 0 zu rechnen, dann hat man ja schon das Ergebnis raus. Das richtige, eigentlich. ... Eigentlich könnte man sie vergessen, aber wenn sie jetzt im Rechenbuch stände, dann müsste man die auch mit abschreiben.**
- Andreas: **Ja, weil, weil es keine richtige Zahl ist.**
- Jana: **Weil, wenn man das mal 0 rechnet, dann kommt ja eh nichts mehr dazu. ... Wie hier und da kann man hier und da auch die Null weglassen.**

Aufgabe 4: Dass das Teilen durch null Probleme bereitet, ist allgemein bekannt. Dass aber auch eine Aufgabe wie $0:5$ Grundschüler vor Probleme stellt, überrascht vielleicht. Zwar antworten sie überwiegend richtig mit „0". Doch welche Probleme sie auf dem Weg dahin überwinden müssen und welche „Fehlvorstellungen" auch hinter einem richtigen Ergebnis stecken können, wird erst aus Schüleräußerungen wie den folgenden sichtbar. Analysieren und vergleichen Sie die Argumente. Achten Sie insbesondere auf die Beteiligung von Aufteil- bzw. Verteilvorstellungen zur Division! Vergleichen Sie die Argumente – dort, wo es sinnvoll ist – mit den o. a. zur Multiplikation mit 0!

- Michael: **0 : 10 ist gleich 10, weil das keine Durchaufgabe ergibt.**
- Aus dem Interview mit Andreas:

  Mmh, 0 : 5, das geht gar nicht.

  Warum nicht?

  Ja, weil 0. Die 5 kann man nicht durch 0 teilen, weil die 0 nicht, ist viel zu wenig, durch 5 zu teilen. Das könnte man auch bei 4 oder 3 oder 2 oder 1 machen, das ginge auch nicht.

Was schreibst du dann hin, wenn du die Aufgabe mal bekommen würdest?
0!
Ja, erst hast du gesagt: „Geht nicht" und jetzt sagst du: „0". Ist denn das das Gleiche?
Ja.

- Matthias: **Wie oft passt die 5 in die 0 rein? 0 mal! Überhaupt gar nicht!**
- Andre: **Wenn man 0 Sachen durch 5 Kinder teilt, das geht ja gar nicht, da hast du nichts, was du teilen sollst, also 0.**
- Aus dem Interview mit Alexander:
  Ist 0.
  Meinst du, das stimmt?
  Ja, also, wenn man sich das so vorstellt, nicht. Aber wenn man jetzt die Probe macht.
  Wie stellst du dir das denn vor?
  Ja, dass es überhaupt nicht geht. 0 : 5, man kann ja nicht 0 durch 5 teilen. Also so weit sind wir noch nicht, dass wir das jetzt gerechnet haben.
  Warum kann man denn nicht 0:5 teilen? Warum ist das schwer?
  Weil die 0 niedriger ist als die 5. Wenn es jetzt zum Beispiel 7 : 5 wäre, okay, dann ist es 5 Rest 2, dann wäre es aber, die 7 wäre dann größer als die 5.
  Mmh, also das findest du schwer?
  Ja, weil die ist niedriger, aber wenn man jetzt die Probe macht, sieht man, das ist ganz leicht, weil das ist 0.

Aufgabe 5: Dass die Division durch null „verboten" ist, wissen viele Erwachsene. Fragt man sie nach dem Grund, müssen die meisten passen. Grundschüler, die das erste Mal mit einer Aufgabe wie 5 : 0 konfrontiert werden, wissen noch nichts von diesem „Verbot" und versuchen das Problem mit Hilfe des ihnen zur Verfügung stehenden Instrumentariums an Vorstellungen und Begriffen zu lösen. Analysieren Sie, welche Argumente die nachstehend zitierten Schüler benutzt haben, um ihre Antwort zu rechtfertigen!

- Christoph: **Ist 5 oder 0! Wie oft passt die 0 in die 5 rein? Ach, das bringt mich ganz durcheinander.**
- Lisette: **Das kann man eigentlich nicht richtig rauskriegen, was da rauskommt, weil man die Probe nicht rechnen kann. Dann ist es schwierig zu sagen, was da rauskommt.**
- Agniezka: **Ja, weil 5 : 0, da ist gar nichts geteilt. Also ist es 5.**
- Aus dem Interview mit André:
  ... Also wenn du die Probe rechnest, ist es soundsovielmal 0 ist 5. Also 5, 5 · 0 ist 5.
  5 · 0 ist 5?
  Äh ne! 5 · 0 ist 0, ja also. Ne, es muss aber 5 rauskommen. Also geht nicht, wievielmal 0 ist 5? Also, ist 0. 0 · 0 ist 0, ne. ... 5 Sachen durch 0 Kinder, das geht ja schlecht. Es sind ja keine da, die die Sachen aufessen können.
- Matthias: **Wie oft passt die 0 in die 5 rein? 0 in 5? Wie soll denn die da reinpassen? Ja, die passt da überhaupt nicht rein! ... 5-mal kann man nicht sagen.**
- Jana: **Das sind 5, weil die 0, die steckt in der 5 fünfmal sozusagen. Irgendwie, das ist für mich jetzt auch schon ein bisschen schwieriger zu sagen, wie oft die 0 in der 5 steckt, weil bei der 1, da würden das ja auch 5 ergeben. ... Da können ja auch keine 5 rauskommen eigentlich, weil wenn bei der 1, wenn ich jetzt schon durch 1 rechne, wenn dann schon 5 herauskommt, dann kann ja bei 'ner tieferen Zahl nicht auch 5 rauskommen.**

Aufgabe 6: Schreiben Sie einen kindgerechten Antwortbrief, mit dem Sie Nicole helfen können ihren Denkfehler selbst aufzudecken.

Sehr geehrter Prof. Dr. Hartmut Spiegel!
Ich heiße Nicole Richter und bin 11 Jahre. Ich gehe in die 5. Klasse. In der Mathematik finde ich etwas nicht logisch. Und zwar die Aufgabe 1 : 0 = nicht möglich, so heißt es in der 5. Klasse, später ist das Ergebnis unendlich. Doch auch das ist unlogisch. Ich bin der Meinung 1 : 0 = 1. Denn, wenn man eine Torte hat und man lädt Gäste ein, keiner kommt, die Torte wird also nicht geteilt, so bleibt 1 Torte übrig. Was meinen Sie dazu? Bitte antworten Sie.

Mit freundlichen Grüßen
Nicole Richter

D 27: Schülerlösungen als Anlässe zum Mathematiktreiben

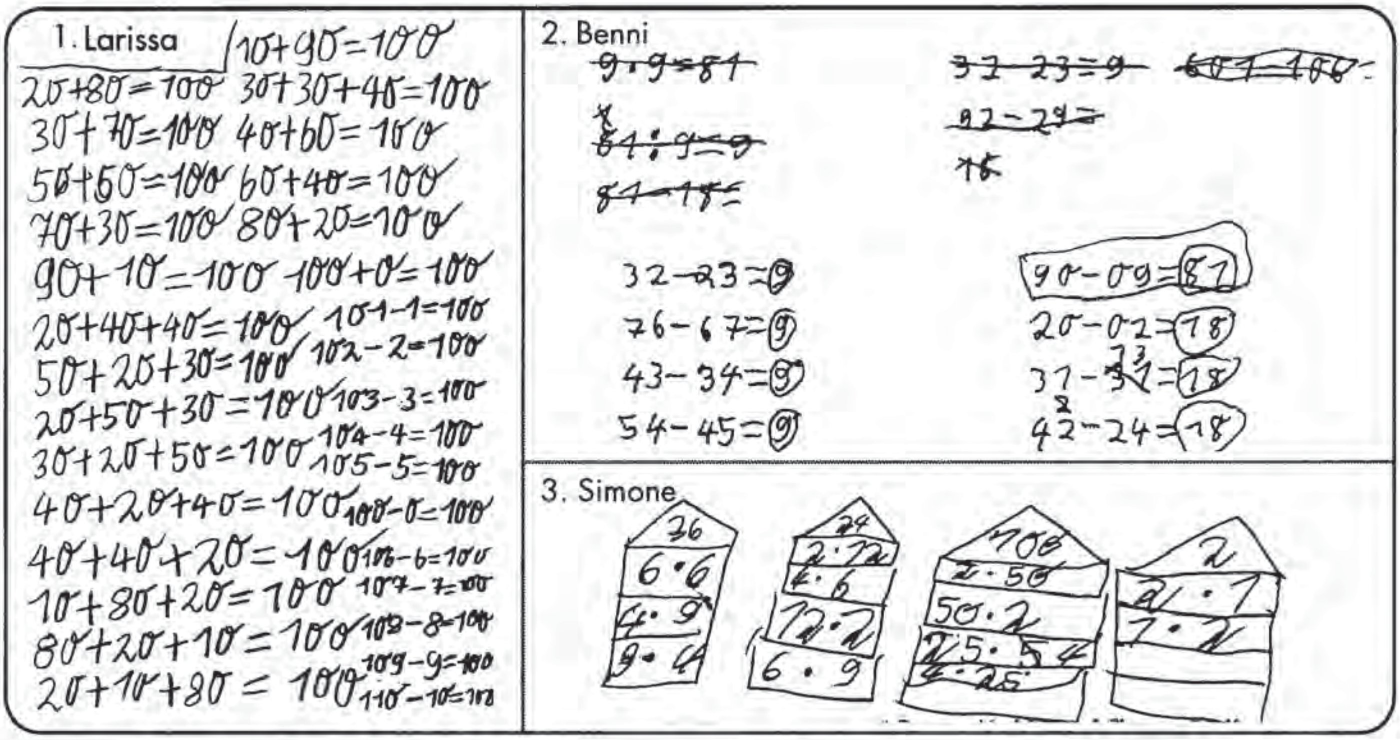
Aufgabe 1: Ergebnis 100

Gegen Ende des 1. Schuljahres wurden die Schüler gebeten, mit Hilfe der Hunderter-Perlenkette Aufgaben mit dem Ergebnis 100 zu finden. Larissa produzierte Plusaufgaben mit zwei und solche mit drei Summanden sowie einige Minusaufgaben.

a) Inwieweit ist Larissa systematisch vorgegangen? Begründen Sie kurz Ihre Einschätzung!

b) Finden Sie alle Zerlegungen der 100 in drei durch 10 teilbare Zahlen (wie etwa 50+20+30). Nehmen Sie dabei an, dass die Reihenfolge von Bedeutung ist; d.h. die Zerlegung 50+20+30 soll unterschieden werden von beispielsweise der Darstellung 50+30+20. Versuchen Sie die Zerlegungen zu ordnen!

c) Finden Sie alle Möglichkeiten, die 100 in drei Summanden zu zerlegen, die durch 5 teilbar sind (bspw. 5+10+85 oder 50+25+25). Stellen Sie Ihre Überlegungen geordnet dar!



Aufgabe 2: Subtraktion von Spiegelzahlen

Bei diesem Unterrichtsbeispiel muss man von einer zweistelligen Zahl (Zehner größer als Einerziffer) ihre Spiegelzahl subtrahieren, die durch das Vertauschen von Zehner- und Einerziffer entsteht (Beispiele: 52−25=27 oder 90−09=81).

a) Erarbeiten Sie sich den mathematischen Hintergrund: Welche Resultate können entstehen? Warum diese und keine anderen? Wie viele Aufgaben gibt es pro Resultat?

b) Stellen Sie sich vor, dass Benni (vgl. Abb.) Sie während der Unterrichtsstunde anspricht: „Gucken Sie mal!" Wie würden Sie darauf reagieren?

Aufgabe 3: Malhäuser

Bei den sog. Malhäusern besteht die Aufgabenvorschrift darin, in das „Dach" eines Hauses eine Zahl des Hunderterraums zu schreiben und in jedes Stockwerk eine Malaufgabe einzutragen, die die Dachzahl als Resultat aufweist. Aufgabe und Tauschaufgabe gelten als verschiedene Lösungen.

In einem zweiten Schuljahr gab die Lehrperson zu Beginn der Schulstunde bestimmte Dachzahlen vor. Anschließend hatten die Schüler Gelegenheit, selbst Dachzahlen zu wählen. Bei einigen der Kinder entstand das Bedürfnis, möglichst hohe und möglichst niedrige Häuser zu bauen. Dabei notierten sie auch Aufgaben, bei denen einer der Faktoren größer war als 10, und verließen somit das eigentlich vorgesehene Gebiet des kleinen Einmaleins. Nach einiger Zeit legte Simone der Lehrperson einen Zettel vor (vgl. Abb.) und sagte: „Guck mal, ich hab's rausgekriegt. Die 100 ist das höchste Haus und die 2 das niedrigste."

Sind das wirklich die Dachzahlen des höchsten bzw. des niedrigsten Hauses? Wie reagieren Sie auf Simones Lösung?

Im Folgenden wollen wir einige Hinweise zur Interpretation der Dokumente D 1 bis D 27 geben (vgl. Kap. 4.1). Diese sollten allerdings nicht *vor* der Auseinandersetzung mit den von uns formulierten Denkanstößen herangezogen werden. Stattdessen sollten sie die Resultate des eigenen Nachdenkens und des Austausches in der Lerngruppe bestätigen oder zum Weiterdenken anregen.

Damit die Aufgaben auch im Rahmen der Lehrerbildung, beispielsweise in Form von Übungsaufgaben, benutzt werden können, beschränken wir uns bei einigen Dokumenten auf wenige Hinweise, um eine unzweifelhafte Eigenleistung der Lernenden zu ermöglichen. Bei anderen Aufgabenstellungen, insbesondere bei denjenigen, bei denen uns eine Interpretation des vorliegenden Datenmaterials als schwierig erscheint, geben wir ausführlichere Hinweise.

D 1 Rechenfähigkeit am Ende der Kindergartenzeit und ihre Entwicklung

Die vorliegenden Transkripte (vgl. Danwerth 1996, Schurbaum 1996) zeigen u. E., dass die Schüler auch in der relativ kurzen Spanne zwischen Ende der Kindergartenzeit und Beginn der Schulzeit Fortschritte gemacht haben, obwohl währenddessen kaum „systematische Unterweisung" erfolgte. Da die Septemberinterviews direkt nach Ende der Sommerferien durchgeführt wurden, erscheint der Einfluss, den der Unterricht auf die Entwicklung genommen haben mag, relativ gering zu sein.

Wir verzichten auf eine umfassende Diskussion der einzelnen Vorgehensweisen. Aufmerksam machen wollen wir lediglich auf zwei Details. Michael benutzt bei der Aufgabe 11–3 in beiden Interviews seine Finger, aber in unterschiedlicher Funktion: Im Juni wird für ihn der Versuch zum Stolperstein, die gesamte Situation direkt mit den Fingern zu modellieren: Jede Person der Ausgangsmenge entspricht dabei einem Finger. Im zweiten Interview benötigt er statt elf nur die drei Finger – nun, um die von ihm benutzten ordinalen Zahlwörter (bzw. die mitgedachten Personen) zu repräsentieren.

Die unterschiedlichen Reaktionen von Timo (5+2+1) könnte man als Beleg für die Kontextabhängigkeit des Denkens ansehen – ein Phänomen, das Gegenstand der *Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche* (Bauersfeld 1983) ist und heutzutage als sog. situierte Kognition ein wesentliches Thema lernpsychologischer Forschung darstellt. In der „Rechenwelt" kann Timo die Aufgabe lösen, in der „Geldwelt" nicht. Unseres Erachtens ist aber auch die Deutung möglich, dass Timo die Aufgabenstellung nicht so aufgefasst hat, wie sie gemeint war, und stattdessen die Anzahl der sich im Portemonnaie befindenden Geldstücke (3) ermittelte.

Literaturhinweise: Baroody (1989); de Corte & Verschaffel (1987); Geary (1994); Gelman & Gallistel (1978); Ginsburg (1977); Hendrickson (1979); Hengartner & Röthlisberger (1995); Hughes (1986); Knapstein & Spiegel (1995); Krauthausen (1994, 36ff.); Padberg (1986, 28ff.); Radatz & Schipper (1983, 63ff.); Schipper (1996); Schmidt & Weiser (1982); Selter (1995); Spiegel (1992).

D 2 Zur Entwicklung der Rechenfähigkeit von Angelika

Die abgedruckten Transkripte stammen aus dem von Danwerth (1996) und Schurbaum (1996) durchgeführten Projekt. Auch hier wollen wir nicht alles Erwähnenswerte aufführen, sondern nur auf zwei Auffälligkeiten eingehen. Wie wir wiederholt betont haben, steckt hinter vielen Antworten mehr an Rationalität, als man normalerweise vermutet. Dennoch gibt es immer wieder Dokumente, bei denen man mangels Indizien schlicht im Dunkeln tappt und allenfalls spekulieren kann. Was sich beispielsweise Angelika im Juni gedacht hat, als sie zu dem Schluss kam, dass 3 DM und „noch 5 DM dazu" 6 DM seien, ist eine dieser Fragen, die für uns offen geblieben ist.

Anders ist es bei der Aufgabe 16+6: Wenn Angelika nicht laut gezählt, sondern lediglich „31" gesagt hätte, wäre die Deutung ebenfalls schwierig gewesen. Bemerkenswert ist, dass sie im ersten Interview als Nachfolger der 20 die 30 angibt und als deren Nachfolger die 31 (statt der 40, wie man vielleicht erwarten würde). Im Septemberinterview hingegen benennt sie als Nachfolger der sechzehn die Zahlen einundsechzehn, zweiundsechzehn, usw. (Analog verfährt sie im Übrigen auch für die Nachfolger der dreizehn.) Eine u. E. plausible Erklärung könnte die Verwechslung der lautlich schwer zu unterscheidenden Zahlen sechzehn und sechzig sein. Diese Annahme wird auch dadurch gestützt, dass Angelika die richtige Antwort produziert, nachdem sie von der Interviewerin dazu angeregt wurde, sich die Zahlwortreihe ins Gedächtnis zurückzurufen.

Literaturhinweise: vgl. Literaturhinweise zu D 1.

Die abgedruckten Transkripte stammen aus dem von Danwerth (1996) und Schurbaum (1996) durchgeführten Projekt. Der offensichtlich schwierigste Schritt beim Zählen im unvertrauten Terrain ist der Schritt auf die nächste Zehnerzahl – beim Vorwärts- wie beim Rückwärtszählen. Das ist auch verständlich. Einfacher wäre es wohl, wenn nach „neun-zehn" die „zehn-zehn" oder nach „neun-und-zwanzig" die „zehn-und-zwanzig" käme.

So wie wir (vorwärts) zählen, ist allerdings ein doppelter Bruch zu verzeichnen: „Neun-und-zwanzig" und dann „dreißig" – das Zahlwort für den Einer am Anfang verschwindet und beim Zehner wird um eins erhöht. Letzteres wird manchmal von Kindern nicht berücksichtigt und sie zählen: 39, 30, 31, ...

Ein solches Beispiel ist zwar in diesen Dokumenten nicht enthalten. Doch finden wir bei Erwin folgende Wortpaare: 59, 80; 89, elfzig; 59, 30; 49, 30, allerdings auch die korrekten Wortfolgen 19, 20; 29, 30 und 39, 40. Seine Wortschöpfung „elfzig" ist im Übrigen ein Beispiel für eine der Konvention nicht entsprechende, aber unsere Regeln einbeziehende Konstruktion. Der Hintergrund für Erwins „Schwierigkeit", die wir vielleicht nur als solche interpretieren, könnte folgender sein: Die korrekte „neunzig" im Anschluss an 89 ist eine Besonderheit, denn der letzte Einer (9) taucht in der neuen Zehnerzahl auf. Und auch die 10 in der in Frage kommenden „zehnzig" ist eventuell der 9 aus der 89 noch zu nahe.

Erwins Zahlenpaare 28, 90 und 38, 90 sind ebenfalls erstaunlich. Ob sich seine Erfahrung, dass es mit dem Nachfolger der 28 (bzw. der 38) etwas Besonderes auf sich hat, so auswirkt, dass er schon dann – unter Benutzung der regulär folgenden 9 der 29 bzw. der 39 – ein neues Zehnerzahlwort bildet?

Auch Timo hat Schwierigkeiten mit dem Übergang zum nächsten Zehner. Im Juni zählt er 19, 11 (neun – zehn–elf?), aber im zweiten Anlauf 19, 20; im September 39, 70 bzw. 79, 30, gleich darauf jedoch 39, 40 und 49, 50, schließlich 59, 100. Dass Timo – wie im Übrigen viele Schüler – bei der Hunderterüberschreitung hundert, einhundert, zweihundert usw. zählt, scheint uns weniger ein Beleg dafür zu sein, dass er in Hunderterschritten vorangeht, als vielmehr dafür, dass er die Zahlwörter für 101, 102, 103 usw. nicht gemäß der üblichen Konvention, sondern in konsequenter Weiterführung der Zahlwortbildungsregeln für den Hunderterraum produziert. Dort wird beim Übergang von ein- zu zweistelligen Zahlen die Einerziffer schließlich auch als Erstes gesprochen; warum sollte dieses nicht beim Übergang in den Bereich der dreistelligen Zahlen genauso sein? Diese durch hier nicht erwähnte Zusatzinformationen gestützte Interpretation soll allerdings nicht so verstanden werden, als würden einige Kinder nicht auch tatsächlich in Hunderterschritten zählen.

Nun zu den Problemen beim *Rückwärtszählen*: Dass dort nach 91 neunzig genannt wird, mag für denjenigen keine Schwierigkeit darstellen, der mit dem System und der Bedeutung der Zahlworte vertraut ist und vielleicht sogar die Zahlsymbole vor seinem inneren Auge hat. Ohne diesen Hintergrund kann die „Zehnerüberschreitung" jedoch eine Hürde darstellen, wie wir bei Michael und Jan erkennen können. Wenn Jan nach 91 achtzig sagt, so überträgt er vermutlich eine Erfahrung vom Vorwärtszählen: Nach der letzten Zehner-Einerzahl vor der Überschreitung (z.B. neunund*dreiß*ig) kommt eine *neue* Zehnerzahl (*vier*zig). Analog muss nach 91 die 80 gesagt werden. Auch Michaels verworfene Ansätze im Septemberinterview 41, dreiz- und 31, zwanz- lassen sich vermutlich hier einordnen, zumal bei ihm im November auch 91, 80 zu finden ist. Doch möglicherweise unterbricht er sich selbst, weil er sich nicht ganz sicher ist, und macht mit den vertrauten zweistelligen Zehner-Einerzahlen weiter. So lässt er beispielsweise auf 31 „zwanz-" ,29, 28, ... folgen, wobei er am Ende von 21 auf 19 springt. Seine Wortfolge 93, 83, 73, ... im Anschluss an 41, dreiz- repräsentiert mit ziemlicher Sicherheit die Zahlen 39, 38, 37, ... Interessant ist hier zu analysieren, wann er seinen Fehler bemerkt und von da ab ein Stück weit unserem System folgt.

Abschließend soll das verbreitete und auch hier zu beobachtende Phänomen nicht unerwähnt bleiben, dass viele Kinder die so genannten Schnapszahlen, d.h. diejenigen mit zwei gleichen Ziffern, auslassen. Zwei mögliche Erklärungen sind die folgenden: Zum einen könnte es sein, dass es für die Schüler ungewohnt ist, ein Zahlwort „mit Wiederholung" zu produzieren (drei-und-drei-ßig), da die weitaus meisten Zahlen aus zwei verschiedenen (Worten für)

Ziffern gebildet werden. Es könnte allerdings auch sein, dass sich auswendige Verfügbarkeit der Zahlwortreihe im Zahlenraum bis 10 „durchsetzt" (3-4-5) und die Kinder dazu verleitet, an die *drei*-und-*vier*-zig die *fünf*-und-vier-zig anzuschließen.

Literaturhinweise: Ezawa (1996); Fuson (1988); Gelman & Gallistel (1978); Ginsburg (1977); Hughes (1986); Padberg (1986, 28ff.); Nunes Carraher (1985); Nunes (1996); Nunes Carraher & Schliemann (1990); Schmidt (1982); Schmidt (1983); Schmidt & Weiser (1982); Steffe et al. (1983).

D 4: Wie Erstklässler mit Darstellungen größerer Zahlen umgehen

Die abgedruckten Kinderreaktionen sind den Arbeiten von Arndt (1996) und Richter (1996) entnommen. Wir kommentieren zunächst die Vorgehensweisen der Kinder, denen eine Steckwürfelmenge vorgelegt wurde, zu der sie dann das zugehörige Zahlwort nannten und anschließend das entsprechende Zahlsymbol legten.

Bei Kamila ist das häufig vorkommende Phänomen zu beobachten, dass die Inversion, also die zur Schreibweise gegenläufige Sprechweise der zweistelligen Zahlen, nicht beachtet wird. Sie benennt die Steckwürfelmenge korrekt, legt dann aber das Zahlsymbol der Reihenfolge beim Sprechen folgend. Der Rückgriff auf die 30 führt bei der 34 zwar zur Korrektur, doch dies funktioniert im Weiteren bei 40 und 43 nicht in gleicher Weise.

Rena zählt die Steckwürfelstangen am Schluss wie folgt: neunzig, hundert, einhundert, zweihundert. Dann zählt sie an den Einerwürfeln weiter von zweihunderteins bis zweihundertsechs. Das Zahlsymbol, das sie dann legt, passt zu ihrem Zahlwort, aber ebenso wie dieses nicht zur vorgegebenen Menge.

Tessa wendet bei der Zahlwortbildung die Inversion (erst die Einer, dann die Zehner) auch auf eine dreistellige Zahl an (erst die Einer, dann die Hunderter), so dass sie die Zahl, die wir hundertzwei nennen, als zweihundert bezeichnet. Dass sie das Richtige meint, wird dadurch unterstrichen, dass sie das passende Symbol hinzulegen kann.

Bei Patrick ist es genau umgekehrt: Er weiß das richtige Wort für zwei Hunderterplatten, wendet aber beim Übergang zum Symbol die nicht zutreffende Inversion an, so dass er ein Symbol erhält, das weder zur Menge noch zum Wort passt.

In Form einer Tabelle wollen wir im Weiteren eine deutende Klassifikation derjenigen Wortbildungen beim Lesen vorgegebener Zahlsymbole anbieten, die von der Norm abweichen. Auf Besonderheiten beim Legen der entsprechenden Zahlen mit Steckwürfeln gehen wir nicht näher ein.

Tabelle 1: Klassifikation von Wortbildungen

Bei zweistelligen Zahlen wird die Inversion nicht bzw. bei dreistelligen Zahlen falsch verwendet.	Kamila: 86 -> achtundsechzig Ann-Katrin: 101 -> einhundert 102 -> zweihundert Elaha: 125 -> fünfundzwanzighundert sowie andere Beispiele
Bestimmte dreistellige Zahlen werden durch Addition der letzten beiden Ziffern an das Schema „zweistellig" assimiliert.	Mohamedreza: 124 -> sechzehn 132 -> fünfzehn
Dreistellige Zahlen werden als dem Hunderterbereich zugehörig erkannt, die ersten beiden Ziffern werden als zweistellige Zahl gelesen.	letzte Ziffer Null: Mohammedreza: 110 -> elfhundert Michael: 120 -> hundertzwölf keine Null: Michael: 112 -> hundertelfzwei 124 -> hundertzwölfvier
Vierstellige Zahlen werden als dem Tausenderbereich zugehörig erkannt, die ersten beiden Ziffern werden als zweistellige Zahl gelesen.	Anna: 1200 -> zwölftausend Annelie: 1231 -> zwölftausendeinunddreißig
Für 10000 und 100000 wird analog zu den niederen Bündelungsstufen ein neuer Bündelungsname gewählt.	Anna: 10000 -> Milliarden

Literaturhinweise: Baroody (1987); Fuson et al. (1990); Ginsburg (1977); Jones et al. (1994); Jones et al. (1996).

D 5 Informelle Vorgehensweisen zur Addition im Hunderterraum

Die abgedruckten Transkripte stammen aus dem von Arndt (1996) und Richter (1996) durchgeführten Projekt. Wir wollen uns auf folgenden Hinweis beschränken. Die Strategien der Kinder können im Hinblick auf folgende Merkmale unterschieden bzw. verglichen werden: Wie splitten sie die Zahlen auf und in welcher Reihenfolge addieren sie die einzelnen Teile? Welche Strategien (Zählen bzw. verschiedene Arten zu rechnen) benutzen sie bei den Teilschritten? Für die Zusammenstellung und Diskussion verschiedener Rechenstrategien im Zahlenraum bis 100 verweisen wir auf Wittmann & Müller (1995, 87) sowie auf Beishuizen & Klein (1997). Dass die Steckwürfel – wie im Übrigen jede Art von Material – den Gebrauch gewisser Strategien nahe legen, jedoch stets auch den Einsatz (und auch das Verständnis) von anderen erschweren, soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben.

Literaturhinweise: Baroody (1987); Beishuizen (1993); Beishuizen & Klein (1997); Carpenter & Moser (1982; 1984); Dickson et al. (1984); Fuson (1992); Hughes (1986); Padberg (1993); Radatz & Schipper (1983, 73ff.); Wittmann & Müller (1995, 87).

D 6 Informelle Vorgehensweisen zur Subtraktion im Hunderterraum

Die abgedruckten Transkripte stammen aus dem von Arndt (1996) und Richter (1996) durchgeführten Projekt. Auch bei diesem Dokument wollen wir auf genaue Ausführungen zu sämtlichen Rechenwegen verzichten. Bei der Analyse der Lösungswege können ähnliche Kriterien benutzt werden wie die in den Hinweisen zu D 5 genannten. Bei den hier vorliegenden Subtraktions- bzw. Ergänzungsaufgaben kann man zusätzlich danach unterscheiden, ob die Kinder abziehen, vorwärts ergänzen oder rückwärts ergänzen (s. u.). Auf ausgewählte Details gehen wir im Folgenden ein:

Mohamedreza (24−6=8) ergänzt zunächst von der 6 zur 10. Dann ergänzt er entweder von der 10 zur 14, da er vergessen hat, dass sich 24 und nicht 14 Steckwürfel in der Schachtel befinden; oder er ergänzt von der 20 zur 24 und berücksichtigt die von der 10 zur 20 vorgenommene Ergänzung um 10 im Resultat nicht.

Bei Anna (37−11=29) kann es sich sowohl um einen Zählfehler (vgl. D 3: 21, 20, 29) handeln als auch um einen Merkfehler – unter Nachwirkung der 30, die sie die bereits erzielten 20 vergessen ließ. Es bleibt darüber hinaus festzuhalten, dass sie in beiden Fällen die 7 der 37 vergisst und lediglich 30−11 berechnet.

Sophia ergänzt wohl zunächst von 20 bis 30 und dann von 6 bis 7 und addiert abschließend die beiden Teilresultate.

Das rückwärtige Ergänzen wurde als Lösungsstrategie vermutlich von Kamila angewandt, die bei der Aufgabe 37−x=26 als Zwischenergebnisse „36 und dann 26" nennt, also vermutlich von 37 zunächst zur 36 und von dort weiter zurück bis zur 26 ergänzt. Als sie ihren Lösungsweg erläutern soll, scheint es allerdings so, als habe sie stellenweise subtrahiert (30−10 und 7−1). Dieses Beispiel zeigt auf, wie schwierig es für Kinder sein kann, ihren authentischen Lösungsweg zu verbalisieren, und wie mehrdeutig Interpretationen dieser Rechenwege sein können (vgl. hierzu auch Kap. 5.1).

Bei dem, was Elaha sagt, scheint es sich ebenfalls eher um eine Argumentation zu handeln, die das Ergebnis 5 nachträglich rechtfertigt, als um eine, die das Vorgehen auf dem Weg zur Lösung beschreibt. Andererseits kann nicht ausgeschlossen werden, dass die in der Aufgabe vorkommenden Ziffern 3 und 8 sie unmittelbar an den Zahlensatz 5+3=8 erinnern, so dass damit doch ihr Lösungsweg beschrieben wird.

Literaturhinweise: vgl. Literaturhinweise zu D 5; außerdem Padberg (1994).

D 7 Subtraktion im Hunderterraum: Lösungswege von Jo-Ann

Die abgedruckten Transkripte stammen aus dem von Lange (1995) und Schulze (1995) durchgeführten Projekt. Mathematisch gesehen geht es bei allen diesen Aufgaben um die Ermittlung der Differenz zweier Zahlen. Zu den Aufgaben, bei denen die zu ermittelnde Zahl eine Differenz ist, gehören die so genannten Abziehaufgaben – formal „a−b=x" – und die Ergänzungsaufgaben – formal „a+x=b". Ob man eine Textaufgabe als Abzieh- oder Ergänzungsaufgabe ansieht, hängt von der individuellen Interpretation ab: Bei den hier vorkommenden scheint uns diejenige Zuordnung die nächstliegende zu sein, die der vorangestellten Gleichung entspricht. Das heißt aber nicht, dass andere Interpretationen ausgeschlossen oder unsinnig wären. Die vom Kind benutzte *Rechenstrategie* (abziehen, vorwärts oder rückwärts ergänzen) entspricht nicht immer der Struktur.

Welche Strategien die Kinder bei solchen Aufgaben benutzen und welche

Rolle dabei ggf. Struktur, Kontext und die verwendeten Zahlen spielen – zur Beantwortung eben dieser Fragen sollte das Erkundungsprojekt beitragen, aus dem die wiedergegeben Episoden stammen. Bis auf wenige Ausnahmen kam jedes Zahlenpaar verteilt auf vier Interviews insgesamt viermal vor: die Zahlen 18 und 60 beispielsweise in der Abziehversion 60–18=x und in der Ergänzungsversion 18+x=60 jeweils einmal formal und einmal als Textaufgabe (als Beispiele vgl. die Aufgaben 4, 5, 6.)

Die in Nr. 1 als Ergänzungsaufgabe gedachte Textaufgabe interpretiert Jo-Ann auch als solche, und ihre Vorgehensweise orientiert sich daran. Ihre Strategie, erst im Zehnerbereich und dann im Einerbereich zu ergänzen, ist vermutlich die Ursache für ihren Fehler. Interessant wäre es zu wissen, ob sie z.B. bei 52+x=58 ihren Fehler ebenfalls begangen hätte.

Auch Nr. 2 interpretiert sie zunächst anscheinend so, wie sie gemeint war – nämlich als Abziehaufgabe („minus 58"). Unterstellt man, dass das, was sie sagt, auch ihre Lösungsstrategie korrekt beschreibt, dann hat sie diese Abziehaufgabe allerdings ergänzend und mit dem gleichen Fehler gelöst, der ihr auch bei Nr. 1 unterlief. Mehrere Gründe für die Wahl ihrer Vorgehensweise sind denkbar: So ist es beim Abziehen erforderlich, einen Zehnerübergang zu machen. Außerdem liegen die beiden Zahlen relativ nah beieinander. Wegen des geringen zeitlichen Abstands der beiden Interviews kann aber auch ein Erinnerungseffekt nicht ausgeschlossen werden.

Im Unterschied zu Nr. 2 passt Jo-Anns Vorgehensweise bei der dritten Aufgabe zu ihrer zunächst geäußerten Interpretation: Sie zieht stellenweise ab – zunächst die Zehner, dann die Einer. Wenn sie sagt: „Weil 10 von vier ... 74 ist gleich 60", so meint sie damit sicherlich nicht, dass 74–10=60 sei, sondern bezieht sich nur auf den jeweiligen Zehneranteil des Minuenden und des Ergebnisses. Denn sie fügt später hinzu: „Dann muss ich 6 von der 4 wegnehmen." Obwohl Jo-Ann auf diese Weise ein korrektes Ergebnis erzielt, bekommt sie am Ende ihrer Erklärung Schwierigkeiten. Sie sucht den Ausweg darin, den zu der zunächst gewählten Strategie ähnlichen schriftlichen Algorithmus durchzuführen. Doch zieht sie stellenweise die kleinere von der größeren Ziffer ab, unabhängig davon, ob diese sich im Minuend oder im Subtrahend befindet. Leider kann man so etwas häufig beobachten: Die den Kindern von ihren Eltern in durchaus guter Absicht gezeigten Tricks bzw. Normalverfahren produzieren oft eher Fehler oder Verwirrung, als dass sie dem Kind helfen.

Das zeigt sich auch bei der vierten Aufgabe (60–18), die sie unmittelbar danach rechnet: „Weil 8 von der 0 geht nicht, das bleibt dann 8." Erst der von der Interviewerin erzeugte Konflikt ruft die Erinnerung an die „Übertrags-Eins" hervor, ohne dass sie sich dort ganz sicher ist. Mit der Äußerung „Nicht 16" bezieht sich Jo-Ann vielleicht auf die Aufgaben, bei denen die Zahlen 58, 16 und 74 miteinander verknüpft wurden. Den Fehler, den sie dann macht (50–8=48), haben wir schon mehrfach beobachten können, eine überzeugende Erklärung sehen wir nicht. Der in so einem Fall normalerweise herangezogene Begriff der ‚Perseveration' („Die 8 hat nachgewirkt!") erscheint uns eher als eine Umschreibung, als dass er hier Klarheit schafft. Eine mögliche Deutung dieses Fehlers geben wir in den Erläuterungen zu den Rechenwegen Ivos (D 8).

Die 5. Aufgabe (18+x=60) ist die am frühesten gestellte und einzige formale in dieser Beispielsammlung. Jo-Ann liest diese Ergänzungsaufgabe auch als solche, löst sie allerdings abziehend. Mit 55–8 meint sie vermutlich 50–8. Auch hier wird sie durch den Wunsch nach einer Erklärung verunsichert, addiert die 8 statt sie zu subtrahieren, und macht dadurch aus ihrem zunächst richtigen Ergebnis ein falsches. Dass sie abzieht statt zu ergänzen, kann folgenden Grund haben: Es erscheint ihr in diesem Fall möglicherweise leichter, einen bekannten kleinen Schritt rückwärts zu gehen, als festzustellen, wie groß ein unbekannter großer Schritt vorwärts ist.

Die als Ergänzungsaufgabe gemeinte 6. Aufgabe (Textaufgabe zu: 18+x=60) wird von Jo-Ann als solche interpretiert. Ob sie diese abziehend oder ergänzend löst, muss offen bleiben. Denn ihre Antwort auf die Frage „Wie kommst du darauf?" ist ein Rechtfertigungsversuch für das Ergebnis 52, der dessen Kenntnis schon voraussetzt und wie die üblicherweise verlangte Probe zur Rechnung 60–18 aussieht. Interessant ist hier, dass sie bei ihrer Erklärung das zunächst falsche Ergebnis korrigiert. Wiederum sagt sie etwas, das falsch klingt: „52 plus 8 ist 10." Sie scheint dabei so etwas zu denken wie: „2 plus 8 ist 10 und 50 plus 10 ist (schon) 60." Wie sonst kann sie zum Schluss kommen, dass sie ihr ursprüngliches Ergebnis 52 um 10 verringern muss, um das richtige zu erhalten?

Jo-Ann steht stellvertretend für zahlreiche Kinder, die ganz intuitiv bei der Subtraktion von der Strategie „Zehner extra, Einer extra" (auch „stellenweise" genannt) Gebrauch machen, sich damit jedoch Schwierigkeiten einhandeln, insbesondere, wenn sie sich nur an den Ziffern orientieren. Das spricht unseres Erachtens dafür, im Unterricht auf diese Strategie explizit einzugehen, um die Probleme in produktiver Auseinandersetzung zu überwinden. Literaturhinweise: Baroody (1984); Beishuizen & Klein (1997); Carpenter, Hiebert & Moser (1981); Carpenter & Moser (1982; 1984); De Corte & Verschaffel (1987); Fuson (1984; 1990; 1992); Hiebert (1982); Geary (1994); Lindvall & Ibarra (1980); Radatz & Schipper (1983, 73ff.).

D 8 Subtraktion im Hunderterraum – Lösungswege von Ivo

Das abgedruckte Transkript stammt aus dem von Lange (1995) und Schulze (1995) durchgeführten Projekt. Das Grundproblem bei Ivos Überlegungen besteht darin, wie er die Aufgabe 10+50=60 so abwandeln kann, dass er eine Lösung zur ursprünglichen Aufgabe 18+__=60 erhält. Er bildet die Summe 18+50=68 und überlegt sich daraufhin, dass 8 zu subtrahieren seien, um zum gewünschten Resultat zu gelangen. Nach einigem Nachdenken versucht er diese 8 von der 60 abzuziehen. Seine Äußerung „Minus 8 sind 8 dann nur noch" könnte dann – wie die anderen Bemerkungen im Umfeld dieser Äußerung vermuten lassen – bedeuten, dass er 50 um 8 vermindert und dabei 50+8 berechnet. So gibt er an, dass an der Stelle der Kästchen eine 58 notiert werden müsste.

Auf Impuls der Interviewerin, die ihm die Probe nahe legt, erkennt er, dass diese Vermutung nicht stimmt, behält aber weiterhin im Auge, dass er die „8 irgendwie mitnehmen" muss. Im Weiteren greift er auf seine eingangs geäußerte Idee zurück, die 18 zu verändern. Ihm ist klar geworden, dass er das Ergebnis (60) nicht verändern darf; und in der ihm vorliegenden Gleichung 18+__=60 kann man – so eventuell seine Deutung – ja nicht die Zahl am leeren Platz modifizieren. Die Interviewerin gibt ihm jedoch zu verstehen, dass er die 18 ebenfalls stehen lassen muss, so dass er als Nächstes die gedachte 58 um 8 vermindern will. Nach Rückfrage der Interviewerin, „von welchen 58" er abziehen wolle, verbalisiert er nochmals die Strategie, 18 um 8 zu vermindern. Auch dieser Ansatz wird im Anschluss an den Kommentar der Interviewerin verworfen.

Diese versucht dann Ivo dazu zu bringen, im Term 18+50 vom zweiten Summanden 8 zu subtrahieren. Ivo hingegen hat die Summe 18+58 vor Augen und möchte die 58 um 8 vermindern. Die Rückfrage der Interviewerin, ob er denn nicht auch von 50 eine 8 abziehen könne, bejaht er.

Zunächst, so scheint es, handelt es sich hierbei um eine befreiende Einsicht („Die ganze 50 kann ich ja verändern."). Er nimmt sich vor, die Aufgabe 50–8 zu berechnen, was zu dem Zeitpunkt, als die Interviews durchgeführt wurden, eine ungewohnte Anforderung darstellte. Das Resultat, das er erhält (50–8=48), repräsentiert einen nach unseren Beobachtungen häufig anzutreffenden Fehlertyp, und Ivo liefert durch seine Erklärungen vielleicht einen Schlüssel zum Verständnis desselben. „Da zieh ich ja 10 ab. Will aber nur 8 abrechnen." Es könnte sein, dass er 50–10 rechnet (40) und dann versucht eine Korrektur vorzunehmen, bei der er jedoch nicht 2, sondern eben 8 addiert.

Nach erneuter Intervention der Interviewerin ermittelt er das korrekte Ergebnis mit 42. Dann versucht sie ihn dazu anzuregen, dieses Resultat durch das Einsetzen in die ursprüngliche Aufgabe (18+42=60) zu überprüfen. Seine weiteren Ausführungen lassen jedoch vermuten, dass er keinen Bezug zwischen seiner einmal geäußerten 42 und der Aufgabe sah. Auf die Frage, ob denn die 42 die gesuchte Zahl sei, antwortet er schwankend, bevor die er 52 als Lösung benennt.

Schließlich gibt die Interviewerin vor, er möge doch die Aufgabe 18+42 mit Steckwürfeln darstellen. Er legt zunächst die 18, dann mit anderen Steckwürfeln die Zahl 60, bevor ihn die Interviewerin erneut daran erinnert, er möge überprüfen, ob 18 plus 42 gleich 60 sei. Während er sagt: „Wenn ich jetzt erst mal von den 4 fünfzig zutue, von den 40 einen Zehner .... Ja.", sieht man ihn in der Videoaufzeichnung auf die 1 der 18 auf der Aufgabenkarte zeigen. Wir deuten das so, dass er in diesem Moment erkennt, dass die Zehner der beiden Zahlen zusammen 50 ergeben und sich – was er dann allerdings nicht mehr sagt – die 8 und die 2 zu 10 ergänzen, so dass das Ergebnis 60 herauskommt. Das deutet er vermutlich mit seinem „Ja" an.

Literaturhinweise: vgl. Literaturhinweise zu D 7.

D 9 Multiplikatives Rechnen zu Beginn des 2. Schuljahres

Die Interviews, aus denen die Ausschnitte stammen, wurden von Spiegel durchgeführt und von Carniel (1993) und Schaumann (1993) transkribiert. Die nachfolgend in tabellarischer Form wiedergegebenen Kommentare und Formalisierungen, die sich auf die Aufgabe 1 beziehen, sind nicht mit dem Anspruch auf Vollständigkeit erstellt. Außer den hier genannten kommen auch andere Interpretationsmöglichkeiten in Frage.

Tabelle 2: Kommentare und Formalisierungen zu Aufgabe 1

	Aufgabentyp	Kommentar zur Lösungs- bzw. Kontrollstrategie	mögliche Formalisierung
1.1	Mult.-Aufg. $3 \cdot 4 = x$	wiederholte Addition	siehe Aufgabenblatt
1.2	Verteilaufg. $4 \cdot x = 8$	Julia rekonstruiert ihren Lösungsweg als eine Art wiederholter Subtraktion. Dabei benutzt sie von vornherein die Zahl, die das Ergebnis darstellt, so dass ihre Vorgehensweise ihren vermutlich durch eine Schätzung erhaltenen Lösungsansatz zur Lösung macht.	$(((8-2)-2)-2)-2=0$
1.3	Aufteilaufg. $x \cdot 3 = 15$	wiederholte Subtraktion	Hauptrechnung / Nebenrechnung $15-3=12$ / 1. Finger abspreizen $12-3=9$ / 2. Finger abspreizen $9-3=6$ / 3. Finger abspreizen $(6-3)-3=0$
2.1	Aufteilaufg. $x \cdot 4 = 16$	Wie sie ihren Lösungsweg beschreibt, sieht es nach einer fortgesetzten Halbierung aus – eine Vorgehensweise, die sich eigentlich eher bei einer Verteilaufgabe anbietet. Es könnte aber auch durchaus so gewesen sein, dass Julia additiv vorgegangen ist ($4+4=8$; $8+8=16$) und die Strategie des fortgesetzten Halbierens erst im Nachhinein entwickelt.	$16=8+8=(4+4)+(4+4)$ oder: $16=2 \cdot 8$; $8=2 \cdot 4$; $16=4 \cdot 4$ oder: $16:4=(16:2):2=8:2=4$
2.2	Verteilaufg. $4 \cdot x = 12$	fortgesetzte Halbierung	$12=6+6=(3+3)+(3+3)$ oder: $12=6+6$, $6=3+3$ oder: $12:4=(12:2):2=6:2=3$
3.1	Mult.-Aufg. $4 \cdot 5 = x$	wiederholte Addition; Verdoppeln	$4 \cdot 5=(5+5)+(5+5)=10+10=20$
3.2	Verteilaufg. $3 \cdot x = 18$	Julias letzte Äußerung weist darauf hin, dass sie vor der Modellierung mit den Klötzen den Lösungsansatz 5 überprüft und verworfen hat. Sie verwendet also systematisches Probieren.	$18=3 \cdot x$ zunächst: $x=5,3 \cdot 5=15$; zu wenig, also $x=6$, $3 \cdot 6=18$
3.3	Aufteilaufg. $x \cdot 4 = 12$	wiederholte Addition	$4+4=8$; $(8+2)+2=12$, also $8+4=12$, also $4+4+4=12$, also $3 \cdot 4=12$

Für die Aufgabe 2 vergleiche man den Erkundungsvorschlag E 4 (Kap. 5.2).

Literaturhinweise: Anghileri (1989); Bönig (1995); de Corte et al. (1988); Geary (1994); Greer (1992); ter Heege (1985); Kouba (1989); Nesher (1988); Selter (1994; 1996).

D 10 Informelle Vorgehensweisen bei einer Verteilaufgabe

Die erforderlichen Informationen sind in das Kapitel 3.2 aufgenommen worden. Die dort vorgestellte Klassifizierung stellt allerdings nur eine von verschiedenen möglichen Klassifizierungen dar. Für weitere Informationen über die Turnhallenaufgabe sowie den Kontext der Untersuchung möchten wir auf Selter (1994, 115) verweisen.

Literaturhinweise: vgl. Literaturhinweise zu D 9; außerdem: Murray et al. (1991; 1992).

D 11 Langfristige Lernprozesse beim multiplikativen Rechnen

Zunächst zu der Frage, warum die Aufgabe 8·9 im ersten Interview nicht behandelt wurde: Eine Reihe von empirischen Untersuchungen lässt vermuten, dass Schüler häufig in der Lage sind Textaufgaben zu lösen, während sie kontextfrei dargebotene Aufgaben noch nicht bewältigen können (vgl. beispielsweise Carpenter & Moser 1984).

Im ersten Interview, das vor der Behandlung des multiplikativen Rechnens stattfand, wurden daher lediglich Textaufgaben gestellt, beispielsweise die hier dargestellte Bonbonaufgabe.

Da die Eigenproduktionen von Achim und Marc-André nicht immer zweifelsfreie Rückschlüsse auf deren Denkwege zulassen, werden ihre Vorgehensweisen im Folgenden etwas ausführlicher erläutert. Weiterführende Hinweise zu den Lernbiographien beider Schüler sowie zweier Mitschüler sind in Selter (1994, 233) zu finden.

Wir beginnen mit einigen Hintergrundinformationen zu Achims Rechenwegen bei der Bonbonaufgabe. Im Januar begann er damit, jedem Kind drei Bonbons zu geben; diesen Ansatz drückte er mit Hilfe des Zahlensatzes 3–3–3 aus, den er jedoch umgehend einklammerte. Daraufhin gab er jeder Person fünf Bonbons, wobei er allerdings einen Fehler beging: Er zählte von 24 um 5 rückwärts bis zur 19 und notierte den Zahlensatz 24–5. Dann zählte er erneut um 5 rückwärts, setzte seine schriftlichen Aufzeichnungen fort (24–5–5) und hatte sich dabei das Zwischenresultat 14 durch vier abgespreizte Finger der linken Hand gemerkt. Anschließend nahm er die auf die gleiche Weise zu repräsentierende 9 als Ausgangspunkt des nächsten rückwärtigen Zählprozesses und vollendete die Gleichung 24–5–5–5=4. Die restlichen vier Bonbons verteilte er so gerecht wie möglich (4–2–1–1=0). Ein Kind, so Achim, bekäme somit sieben Bonbons, den anderen beiden stünden jeweils sechs zu.

Sowohl im März als auch im April malte er in linearer Anordnung vierundzwanzig Kreise. Er verband stets drei von ihnen, indem er sie mit Hilfe von Durch- bzw. Unterstreichungen markierte. In den folgenden beiden Interviews setzte er die Strategie ein, Geteiltaufgaben durch die wiederholte Subtraktion gleich großer Zahlen zu lösen und die Zwischenergebnisse jeweils zu notieren. In den Aufzeichnungen zum fünften Interview heißt es allerdings nicht, wie man vermuten könnte, 24:3=81: Hinter der 8 hatte Achim einen senkrechten Strich gezogen, der andeuten sollte, dass er die Lösung im Kopf berechnet und die „Merkzahlen" im Nachhinein zur Erklärung seines Rechenweges notiert hatte.

Nun zu seinen Lösungen zu der Aufgabe 8·9: Im März ermittelte er zunächst das Resultat von 8+8 zählend. Er schrieb über den entsprechenden Zahlensatz eine 2 als Merkzahl und strich diese direkt anschließend durch. Dann vermerkte Achim die Gleichung 16+8=24 unterhalb der ersten; das Ergebnis hatte er dabei durch Weiterzählen von 16 aus erhalten. Nun notierte er neben der durchgestrichenen 2 eine 3 und strich diese ebenfalls durch. Diese Prozedur wiederholte er, bis er das Endergebnis 72 erhalten hatte.

Im April hatte er zuvor die Aufgaben 6·3 und 7·7 gelöst, indem er gegliederte Punktreihen gezeichnet und die Anzahl der Kreise einzeln abgezählt hatte. Für die Aufgabe 8·9 erschien ihm dieses Verfahren dann als zu aufwendig. Daher meinte er, es reiche vollkommen aus, kleine Striche zu nehmen, von denen jeweils acht durch nicht mitzuzählende Kreise abgetrennt würden. Interessanterweise ermittelte er das richtige Endergebnis, obwohl der zweite Achter lediglich aus sieben Strichen bestand. Er zählte jedoch den zweiten Kreis gegen seine ursprüngliche Intention mit, was wahrscheinlich darauf zurückzuführen ist, dass ihm das Ergebnis von 8+8 bereits bekannt war.

Im Mai sagte Achim auf Anhieb, dass er das Ergebnis zwar nicht kenne, aber wisse, dass 9·9=81 sei. Den entsprechenden Zahlensatz notierte er dann auf Bitten des Interviewers. Dessen Frage allerdings, ob er damit auch das Ergebnis der ursprünglichen Aufgabe ermitteln könne, verneinte er. Stattdessen notierte er die Achterreihe bis zu deren neuntem Glied, wobei er die Ergebnisse jeweils durch Weiterzählen ermittelte. Außerdem verwendete er Merkzahlen – wie bereits schon im März. Zum Schluss vermerkte er den Zahlensatz 8·9=72 neben der eingangs notierten Quadratzahlaufgabe. Achim hatte während des Interviews zwar eine vage Idee, es müsse eine Beziehung zwischen den beiden Aufgaben bestehen, benutzte diese jedoch nicht zur Ermittlung des Ergebnisses. Er war allerdings am Schluss in der Lage, den Zusammenhang zu verbalisieren („8·9=72, weil es 9 weniger sind als 81").

Beim letzten Interview im Juni gab er zunächst die Lösung 8·9=73 an und notierte anschließend hinter einem senkrechten Strich seinen Rechenweg: 9·9 sei 81; davon müssten noch 8 subtrahiert werden. Zwar erhielt er erstmals nicht die korrekte Lösung, doch zeugt sein Vorgehen von seinem wachsenden Bemühen, geschicktere Rechenwege einzuschlagen, und ist somit positiv zu beurteilen.

Nun zu Marc-Andrés Rechenwegen bei der Bonbonaufgabe: Im ersten Interview, das im Januar geführt wurde, notierte er ausführliche Zahlensätze zur Subtraktion. Diese sollten ausdrücken, dass er jedem Kind in einem ersten Schritt vier (erste Zeile), dann zwei und schließlich nochmals zwei Bonbons zuteilte (zweite und dritte Zeile). Er bildete also drei Teilmengen und ermittelte, wie viele Elemente diese jeweils hatten. Dieses Vorgehen können wir als *verteilnahes Rechnen* oder *Aufsplitten* bezeichnen (vgl. Kap. 2. 4).

In den beiden folgenden Interviews änderte sich seine Vorgehensweise: Nun bildete er Teilmengen der Mächtigkeit 3 und stellte fest, wie viele Teilmengen er auf diese Weise erhielt. Hierbei können wir von einer *aufteilnahen* Strategie oder vom *Bündeln* sprechen (vgl. Kap. 2.4). Allerdings lässt das bloße Schreibprodukt diesen Schluss nicht unmittelbar zu, denn genauso gut hätte Marc-André in jedem Schritt jedem Kind ein Bonbon geben und somit drei Teilmengen sukzessiv entstehen lassen können. Wie eine nähere Analyse der Interviewszene jedoch zeigte, hatte er die Aufgabe in der Tat weitgehend kontextunabhängig durch die Bildung von 3er-Teilmengen gelöst.

Ein Unterschied zwischen beiden Interviews soll nicht unerwähnt bleiben: Im März löste Marc-André die Bonbonaufgabe mit Hilfe seiner begleitend entstehenden Aufzeichnungen additiv ($0+3=3$; 6; 9; ...) und verkürzte die symbolische Notation nach dem ersten Schritt. Im April hingegen bewältigte er das Problem subtrahierend, wobei er unterhalb des Striches sein Vorgehen im Nachhinein dokumentierte.

In den letzten beiden Interviews ermittelte er dann die Resultate nicht länger mit Hilfe der Addition oder der Subtraktion, sondern durch Anbindung an die entsprechenden Zahlensätze der Multiplikation ($24:3=8$, weil $8\cdot 3=24$). Allerdings bildete er im Mai nicht direkt die Umkehraufgabe $8\cdot 3$. Zunächst sagte er, dass 21 Bonbons verteilt worden seien, wenn jedes Kind sieben bekommen habe; daher müsse man jeder Person noch eins geben ($7\cdot 3=21+1+1+1=24$).

Abschließend kommentieren wir Marc-Andrés Vorgehensweisen bei der Aufgabe $8\cdot 9$. Im März addierte er die 8 insgesamt elfmal, vermutlich weil er den Überblick über die Anzahl der bereits berücksichtigten Summanden verloren hatte. Er schrieb folgerichtig 88 hin und betonte, dass er eigentlich nicht $8\cdot 9$, sondern $9\cdot 8$ gerechnet habe, was aber – so Marc-André – nicht von Belang gewesen sei. Im April und im Mai machte er expliziten Gebrauch von Rechenstrategien, die er selbst entwickelt hatte: Er berechnete jeweils zunächst im Kopf die richtige Antwort, notierte diese und schrieb dann auf Nachfrage den jeweiligen Rechenweg auf, bei dem er sich jeweils die Stützpunktaufgabe $9\cdot 9$ zunutze gemacht hatte. Im Juni schließlich hatte er die Antwort dann auswendig parat.

Literaturhinweise: vgl. Literaturhinweise zu D 10 sowie Selter (1995a; 1995b).

D 12
Zahlentreppen – Zweitklässler beschreiben und begründen im Rahmen von Rechenübungen

Zunächst zum mathematischen Hintergrund: Bei der Aufgabenstellung, drei aufeinander folgende Zahlen zu addieren, erhält man stets das Dreifache der sog. Mittelzahl. Dieses ist leicht einzusehen, wenn man den ersten Summanden um 1 erhöht und den dritten um 1 vermindert. Die Gesamtsumme bleibt auf diese Weise gleich und man erhält das Dreifache des mittleren Summanden ($1+2+3=(1+1)+2+(3-1)=3\cdot 2$). Grundschülern erschließt sich diese Beziehung nicht ohne weiteres, wie auch die Eigenproduktionen der Schüler zeigen, die nun etwas ausführlicher diskutiert werden.

Achim vermerkte, dass die Resultate der rechten Aufgabenserie die Dreierreihe darstellten. In der linken Spalte seien zudem die jeweils untereinander stehenden Summanden aufeinander folgende Zahlen („Nach der Reihenfolge"). Außerdem gab er an, die Ergebnisse innerhalb einer Zeile seien jeweils dieselben und unterschieden sich von Zeile zu Zeile um 2 (!). Dies erklärt sich dadurch, dass Achim den bekannten Zählfehler beging, lediglich die beiden Zahlen zwischen zwei Resultaten zu berücksichtigen (9, *10*, *11*, 12).

Nina hatte die Aufgabenstruktur erkannt und durch die Anordnung der Zahlen kenntlich gemacht: Es seien, so fügte sie mündlich hinzu, links stets drei zu summierende Zahlen und rechts stehe immer eine mit 3 zu multiplizierende Zahl. Außerdem stünden untereinander und nebeneinander stehende Zahlen jeweils in der Reihenfolge. Sie notierte des Weiteren, ihr sei aufgefallen, es sei bei „mal immer mehr als bei plus". Der direkte Bezug zur eigentlichen Aufgabenstellung war nicht erkennbar. Nina wollte allerdings von ihrer Entdeckung berichten, dass *Mal*aufgaben immer ein größeres Ergebnis aufweisen würden als diejenigen *Plus*aufgaben, für die man dieselben Zahlen verwendete. Erläuternd verglich sie das Resultat von $10\cdot 10$ mit dem Ergebnis von $10+10$. Dass die Ergebnisse der jeweils nebeneinander stehenden Aufgaben gleich waren, merkte sie zum

Schluss an. („Das sind die gleichen Ergebnisse").

Nachdem Sebastian die erste Aufgabe berechnet hatte ($1+2+3=3+3=6$) wollte er einen Zusammenhang zwischen den Plus- und den Malaufgaben herstellen. Hierbei war es sein Bestreben, aus der Aufgabe $2+3+4$ dreimal die 3 „herauszuziehen", um somit die Gleichheit zum Produkt $3 \cdot 3$ erklären zu können. Hierzu addierte er die 2 und die 3; davon subtrahierte er wiederum die 2. Auf diesem Wege erhielt er – ein wenig umständlich – die erste 3. In der 4, so Sebastian, sei die zweite 3 enthalten. Dieses verdeutlichte er durch die Notation des entsprechenden Zahlensatzes ($4-1=3$). Die „Reste" der beiden Gleichungen addierte er ($2+1$) und erzeugte so – wie gewünscht – die dritte 3. Dann beschrieb er einige weitere Besonderheiten der Aufgabenstruktur: Die einzelnen Zahlen (gemeint waren Summanden in der Horizontalen) würden immer um 1 größer, die Resultate wüchsen stets um 3 und der erste Faktor (3) sei stets derselbe. Dann gab er noch an, von Zeile zu Zeile würden die Zahlen jeweils um 1 größer, und verwies abschließend auf die eingangs bereits „bewiesene" Gleichheit beider Ergebnisse.

Sven erklärte, die beiden Ergebnisse einerseits sowie der zweite Summand und der zweite Faktor andererseits seien jeweils gleich. Er erklärte dann mit Hilfe der ihm zur Verfügung stehenden Plättchen, warum die Summe $2+3+4$ dasselbe Resultat ergebe wie das Produkt $3 \cdot 3$: Man könne doch sehen, so Sven, dass es „in der oberen Reihe einer weniger" und „in der unteren Reihe einer mehr" sei. Dann zeichnete er ein entsprechendes „Treppenmuster" und deutete im nächsten Schritt grafisch an, wie er aus der unteren Reihe ein Plättchen in die obere verschieben würde. Dieses Vorgehen verschriftlichte er abschließend: „Wenn man ein Plättchen weg nimmt und zu der oberen Reihe tut, dann ist es $3 \cdot 3$." Auf die Rückfrage, ob sein Beweis nur für diese spezielle Aufgabe gelte, antwortete er, die Lösungsidee sei ohne weiteres übertragbar, man müsse dann nur mehr Plättchen verwenden.

Neben diesen auf die Aufgabenstruktur bezogenen Kommentaren wurden auch einige unerwartete Entdeckungen geäußert. Nachdem beispielsweise Markus die Serie bis zur zehnten Zeile fortgesetzt hatte, beschrieb er recht ausführlich die Art der *Aufgabendarbietung*: Mit dem Satz „4 Aufgaben sind in einer Reihe" wollte er nach eigenem Bekunden ausdrücken, dass jede Plusaufgabe aus vier Zahlen bestehe. Analog umschrieb er die Bauart der Malaufgaben mit „3 Aufgaben sind in einer Reihe." Außerdem gab er an, dass in der Serie der Plusaufgaben jeweils zehn Zahlen untereinander stünden und dass es bei den Malaufgaben ursprünglich vier gewesen seien und er noch sechs hinzugefügt habe.

Danielas Eigenproduktion soll als letztes Beispiel herangezogen werden. Ihr war aufgefallen, die links stehenden Aufgaben seien immer länger („lega") und die rechts angeordneten immer kürzer („küza"). Sie setzte jedoch die beiden Serien nicht fort und gab an, sie habe keine weiteren Auffälligkeiten entdeckt („Mehr fällt mir nicht auf"). Auf Nachfrage schrieb sie dann zwar noch auf, dass die untereinander stehenden Zahlen „nach der Reihe" kämen. Außerdem sagte sie, sie habe in der vierten Zeile eine falsche Zahl und ein falsches Resultat verwendet ($4+5+3$), korrigierte diesen Irrtum jedoch nicht.

Zur Bearbeitung der anderen Aufgaben wollen wir keine weiterführenden Hinweise geben. Anregungen zur Lösung finden Sie hierzu in den Erläuterungen zum Erkundungsprojekt E 9 (Kap. 5.2) sowie in Steinbring (1995), Winter (1985) und Neubrand & Möller (1990, 49ff.).

Weitere Literaturhinweise: Müller & Wittmann (1991); Selter (1996a); für Beispiele Wittmann & Müller (1992; 1995).

D 13 Mündliche Division: Lina und Sebastian

Die abgedruckten Transkripte stammen aus dem von Fromm (1993) durchgeführten Projekt.

Erläuterungen zu den Lösungswegen von Lina und von Sebastian finden sich in den Kapiteln 2.2 und 2.4.

Weitere Literaturhinweise: Fromm & Spiegel (1996); Selter (1996); Spiegel & Fromm (1996).

D 14 Mündliche Division: Annika rechnet 60 : 4

Die abgedruckten Transkripte stammen aus dem von Fromm (1993) durchgeführten Projekt. Die Antwort, die Annika gleich zu Beginn des Interviews gibt (13), wirkt zunächst vermutlich genauso undurchsichtig wie ihre nachfolgenden Erklärungen. Eine genauere Analyse scheint jedoch darauf hinzudeuten, dass sie durchaus vernünftige Überlegungen angestellt hat, allerdings für uns nur schwer als solche zu erkennen.

Der Satzanfang „Ich hab erst 8 durch 4 gerechnet, das waren 12" (Zeile

4) ist auf Anhieb eigentlich nicht zu verstehen. Aber all das, was Annika im weiteren Verlauf des Interviews sagt, legt die Vermutung nahe, dass sie sich Folgendes gedacht hat: „60, das sind 6 Zehner. In jedem Zehner steckt eine 8, also steckt in der 60 schon mal 6-mal die 8. Dann hat man 12-mal die 4, denn zweimal 4 sind 8. Also hat man 12-mal 4 und einen Rest." Formal ausgedrückt: $60=6\cdot 10$; $10=8+2$; $6\cdot 10=6\cdot 8+$ ein Rest; $8=2\cdot 4$; folglich $6\cdot 10=12\cdot 4+$ Rest. Annika meint also keineswegs, dass 8:4 gleich 12 sei, sondern wohl Folgendes: „Ich habe zunächst 8:4 gerechnet. Und da 8 das Doppelte von 4 ist, sind es doppelt so viele Achter, nämlich 12."

Im Weiteren sagt Annika (Zeile 4/5): „... und dann hab ich die Reste davon, das war bei jedem 2, und dann hab ... und das waren dann wieder 12 ..." Hier hat sie vermutlich wie folgt überlegt: „Wenn ich von jedem der sechs Zehner 8 wegnehme, bleiben jeweils 2 übrig. Bei 6 Zehnern hat man also 6 Zweier übrig und das sind zusammen 12." Formal notiert: $60=6\cdot 10$; $10=8+2$; $6\cdot 2=12$; also $60=12\cdot 4+12$. Das erklärt möglicherweise auch die (natürlich nicht korrekte) Antwort 13: „12-mal 4 und dann nochmal 12, also 13-mal 4."

In Zeile 15 schreibt Annika dann: $6\cdot 8=6$. Auf Nachfrage der Interviewerin bemerkt sie, dass die Gleichung in dieser Form nicht stimmt, und streicht sie durch. Nimmt man jedoch an, dass sie sich dabei etwas Vernünftiges gedacht hat, so ist der folgende Gedankengang durchaus plausibel: Bei der Niederschrift der Gleichung handelt sich um eine Gedächtnisstütze, um auf die Frage, wie weit sie gekommen sei, antworten zu können. In ihrem Denkmodell passt die 8 zunächst 6-mal in die 60. Nur den Term $6\cdot 8$ aufzuschreiben kommt ihr vielleicht als nicht ausreichend vor, da im Mathematikunterricht Zahlbeziehungen und Ergebnisse normalerweise in Form von Gleichungen auftreten. So macht Annika aus $6\cdot 8$ die (falsche) Gleichung $6\cdot 8=6$, die als Protokoll ihres Denkprozesses aufgefasst werden kann: 6-mal 8, also schon mal 6 Achter.

Die Äußerung („Da waren 12 übrig, daraus hab ich dann noch mal 8 gemacht, und 2 waren dann übrig, dann hab ich 13-mal 4 gehabt.") in Zeile 18/19 kann vielleicht so interpretiert werden, dass sie ihre Strategie, Achter abzuspalten, auch bei der 12 zum Einsatz bringt, sich jedoch vielleicht davon beeinflussen lässt, dass es zuvor jeweils Zehner waren, von denen sie ausging. Wir vermuten, dass sie daraufhin glaubt ihre Lösungsstrategie erläutert zu haben und so bestätigend zu ihrem schon weiter oben genannten Ergebnis (13-mal 4) zurückkehrt.

Die Äußerung in Zeile 22 („Hab ich aber dabei nicht ... gleich weitergerechnet.") deutet darauf hin, dass ein weiteres Missverständnis vorliegt: Die Interviewerin nimmt an, Annika habe $6\cdot 8=48$ berechnet und die Differenz zwischen 48 und 60 ermittelt. Annika hingegen stellt sich aller Wahrscheinlichkeit nach die 60 als 6 Zehner vor und errechnet die 12 als $6\cdot 2$.

In den Zeilen 38 bis 42 setzt Annika konsequent ihre Strategie fort, Achter abzuspalten, und notiert $12-8=4$. Die so erhaltene 8 wandelt sie in zwei Vierer um und zählt diese zu den bereits erhaltenen zwölf hinzu, so dass sie zur Lösung 14 mal 4 gelangt. Die noch fehlende 4 aus der Gleichung $12-4=8$ vergisst sie dabei vermutlich.

Wir schließen mit zwei generellen Anmerkungen: Häufig verwendet Annika falsche Sprechweisen für eigentlich richtige Gedanken (2-mal 8 sind 4 usw.). Bei der Interpretation des Transkripts sollte man sowohl dieses bedenken als auch die Tatsache, dass Annika die einzelnen Teilsätze ggf. ganz anders aufeinander bezieht, als wir Erwachsene es vermutlich tun würden.

Literaturhinweise: vgl. Literaturhinweise zu D 13.

D 15 Mündliche Division: Verschiedene Rechenwege bei der Aufgabe 200:40

Die abgedruckten Transkripte stammen aus dem von Fromm (1993) durchgeführten Projekt. Bei einigen Schülern fällt auf, dass teilweise mehrere Minuten vergehen, bevor sie eine Antwort geben. Das erscheint uns jedoch vollkommen verständlich zu sein, wenn man bedenkt, dass die interviewten Kinder erstmalig – zumindest in der Schule – mit solchen Anforderungen konfrontiert wurden. Wenn wir im Folgenden einige Anmerkungen zu den Lösungsstrategien machen, geschieht das unter dem Vorbehalt, dass sich natürlich nicht alles, was die Kinder überlegt haben, in dem wieder finden lässt, was sie sagen.

Andrea machte sich eine Stützaufgabe zunutze: $5\cdot 4=20$, also $5\cdot 40=200$. Hier gibt es keine Indizien für die Beteiligung einer Aufteilvorstellung („Wie oft passt die 40 in die 200?") oder einer Verteilvorstellung („Welches ist der vierzigste Teil von Hundert?"). Ihr Vorgehen scheint kontextunabhängig zu sein.

Britta, die nach ihren Angaben von einem Erwachsenen außerhalb der Schule Tricks zum „Nullanhängen" gezeigt bekommen hatte, schloss von 20:4=5 auf 200:40=50. Der Versuch der Interviewerin, sie auf ihren Fehler aufmerksam zu machen, scheiterte. Zwar wusste Britta offensichtlich, dass 50 ein zu großes Ergebnis war, und sie verminderte es auch auf 25. Jedoch hatte sie momentan wohl keine andere Strategie parat, als weiter systematisch zu variieren. Die Interviewerin machte daher den Vorschlag, die Bearbeitung dieser Aufgabe abzubrechen.

Liest man im Transkriptausschnitt des Interviews mit Julia lediglich bis zu der Stelle, an der sie sagt: „Ich hab – ähm – 40 und 40 sind 80", so kann man durchaus vermuten, dass sie aufteilnah rechnete. Sie schien sich zu fragen, wie oft die 40 in die 200 hineinpasste. Diese Herangehensweise passt auf den ersten Blick nicht zur Aufgabenstruktur, denn dort ist nach dem vierzigsten Teil von 200 gefragt. Wenn man jedoch weiterliest, muss man die ursprüngliche Annahme verwerfen: Julia orientierte sich sehr wohl am Kontext und verteilte die Personen einzeln auf die Boote – bei jedem Schritt eine 40er-Gruppe. Dann musste sie nur noch feststellen, wie oft sie diesen Schritt durchführen konnte, um zu wissen, wie viele Leute in einem Boot waren. Mit ihrer Erklärung lieferte sie gleichzeitig eine Begründung dafür, dass die *Verteil*frage „Welches ist der vierzigste Teil von 200?" dieselbe Antwort besaß wie die *Aufteil*frage „Wie oft passt die 40 in die 200?". Diese Austauschbarkeit ist für uns Erwachsene so selbstverständlich geworden, dass wir uns gar nicht mehr darüber wundern. Julias Erläuterung zeigt, dass man diesen Sachverhalt verstehen kann ohne z.B. die Kommutativität der Multiplikation ins Spiel zu bringen.

Für Raphael stand die Aufgabe 200:40 in Analogie zu der von ihm bereits gelösten 300:60, wo die 60 das Doppelte der in der 300 steckenden 30 war – so wie hier bei 40 und 20. Daher musste hier auch 5 herauskommen. Im Weiteren erklärte er, wie er diese Beziehung ausgenutzt hatte: Er begann mit 200:20=10. Nun setzte er sein Wissen ein, dass die Verdoppelung des Divisors die Halbierung des Quotienten zur Folge hat, und kam daher zu 200:40=5. Formal ausgedrückt: $200:20=10$, $40=2\cdot 20$; also $200:40=(200:20):2=10:2=5$.

Sebastian schließlich stellte fest, wievielmal die 40 in die 200 passte, rechnete also aufteilend. Es gibt – im Unterschied zu Julia – keinen Hinweis darauf, ob dennoch möglicherweise die Vorstellung eines Verteilvorgangs mit im Spiel ist.

Eine weitere Lösung zu dieser Aufgabe – nämlich die von Annika – kann dem Kapitel 2 entnommen werden.

Literaturhinweise: vgl. Literaturhinweise zu D 13.

D 16 Mündliche Division: Janas Lösungswege zu 60:12

Die abgedruckten Transkripte stammen aus dem von Fromm (1993) durchgeführten Projekt. Im ersten Interview ermittelte Jana das Ergebnis durch fortgesetzte Addition, d.h. sie addierte stets 12, bis sie bei der 60 ankam. Diese Vorgehensweise lässt darauf schließen, dass sie die formale Aufgabe 60:12 als Aufforderung interpretierte festzustellen, wie oft die 12 in die 60 passte. Warum sie zwischendurch das Resultat von 5 mal 12 mit 80 angab, entzieht sich für uns einer plausiblen Erklärung.

Im zweiten Interview nannte Jana zunächst die Antwort 6 und erläuterte ihre Strategie, auf jeden Tisch wiederholt jeweils zwei Kerzen zu stellen. In diesem Zusammenhang tauchte dann die Zahl 10 auf. Eine mögliche Deutung scheint uns zu sein, dass Jana zunächst nicht von 12, sondern von 10 Tischen ausging. Unter dieser Annahme ermittelte sie die Menge der Kerzen und gelangte so zum Ergebnis 6. Hierfür spricht auch, dass sie im Weiteren die Interpretation ihrer Denkweise durch die Interviewerin bestätigte, es seien vierzig Kerzen, wenn auf jedem Tisch vier von ihnen stünden.

Auf Intervention der Interviewerin stellte sich Jana dann die 12 Tische vor. Sie platzierte zunächst jeweils zwei Kerzen auf jeden von ihnen – das seien schon mal 24 Kerzen. Dann stellte sie zwei weitere Kerzen auf jedem Tisch hinzu und gelangte somit zum Zwischenresultat 48. Wie Jana anschließend erklärte, hatte sie anschließend zunächst nochmals jeweils zwei Kerzen für jeden Tisch veranschlagt, kam allerdings beim Zählen in Zweierschritten von 48 aus über die 60 hinaus („... aber das ging nicht ..."). Also probierte sie es mit je einer zusätzlichen Kerze auf jedem Tisch und kam so zum richtigen Ergebnis. Für Jana stellte sich diese Aufgabe gänzlich anders dar als die im ersten Interview gestellte formale Aufgabe mit den gleichen Zahlen. Sie orientierte sich bei ihrem Lösungsweg streng am Aufgabenkontext (Verteilstruktur) und ging daher ganz anders vor.

Janas Erklärung im dritten Interview beschreibt vermutlich nur den letzten Teil ihrer Überlegungen. Um nämlich den von ihr benannten Lösungsweg zu gehen (symbolisch ausgedrückt: 60:12=50:10+10:2), bei dem sowohl der Dividend als auch der Divisor zerlegt werden, muss man eigentlich die Lösung bereits parat haben. Welche Gedanken diesem Rechenschritt vorangingen, muss im Dunkeln bleiben. Eine mögliche Deutung: Wenn sie sich – was vom Kontext her nahe liegt – fragte, wie viele Zwölfen zusammen 60 ergaben, könnte sie sich überlegt haben, dass es sicherlich nicht 6 sein konnten, weil ja schon 6 Zehner 60 ergeben. Somit mussten es weniger sein, beispielsweise 5. Sie überprüfte dann ihre Vermutung, benutzte dabei die Zerlegung von 12 in 10+2 und wurde bestätigt. Nachstehend sind in einer Gleichungskette mathematische Beziehungen formalisiert wiedergegeben, von denen sie dabei Gebrauch gemacht haben könnte:

$60=50+10=5\cdot10+10=(10+10+10+10+10)+(2+2+2+2+2+2)=(10+2)+(10+2)+(10+2)+(10+2)+(10+2)=5\cdot12$

Literaturhinweise: vgl. Literaturhinweise zu D 13.

D 17 Informelle Rechenstrategien zur Subtraktion im Tausenderraum

Die Schülerlösungen sind nicht in Interviews, sondern während des Unterrichts entstanden (vgl. Sundermann & Selter 1995). Insofern können wir hier keine Detailanalysen anstellen. Die gleichwohl gut vorzunehmenden Klassifizierungen der Vorgehensweisen können unterschiedlich fein angelegt sein und auch mit unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen erfolgen. Wir wollen im Weiteren lediglich eine grobe Orientierung geben.

Generell erscheint es uns als eine sinnvolle Herangehensweise, die Strategien folgendermaßen zu unterscheiden:

- Getrenntes Abziehen der Hunderter, Zehner, Einer ohne (z. B.: 216–100–40–8; 216–8–100–40) oder mit Aufsplitten der Zehner- bzw. der Einerzahl (z. B.: 216–100–20–20–8; 216–100–40–4–4),
- Abziehen und dabei Aufsplitten des Subtrahenden, mit dem Ziel „glatte" Zwischenergebnisse zu erhalten (z. B.: 216–6–10–100–10–2; 216–16–100 – 30–2),
- Abziehen und dabei Ausnützen einer Hilfsaufgabe (216–150+2) sowie
- Ergänzen, wobei auch hier wieder Unterschiede zwischen den einzelnen Vorgehensweisen festgestellt werden können.

Interessant und dem vorliegenden Dokument nicht zu entnehmen – und damit auch auf die Grenzen der hier verwendeten Dokumentationsform am Rechenstrich verweisend – ist, dass Canan nicht vorwärts von 148 auf 216 ergänzte, sondern in einer Art rückwärtigen Ergänzens zur Lösung gelangte. Sie rechnete 216–6–10–2–30–20=148. Wir entnehmen diese Zusatzinformation den von den Schülern zusätzlich symbolisch notierten Rechnungen, die in D 17 nicht abgedruckt sind.

Ein methodischer Hinweis: Zur Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung scheint es uns ein geeignetes Verfahren zu sein, eine Kopie von D 17 zu zerschneiden, so dass man die einzelnen Schülerlösungen frei verschieben und zuordnen kann.

Eine interessante Zusatzaufgabe für die Leserin könnte darin bestehen, die von den Schülern entwickelten Rechenwege mit den in Wittmann & Müller (1992, 20ff.) oder Beishuizen & Klein (1997) dargestellten Rechenmethoden zu vergleichen. Dabei zeigt sich u. a., dass der Rechenstrich – wie auch die Steckwürfel (vgl. D 5 bzw. D 6) – Vorteile, aber auch Einschränkungen bieten.

Weitere Literaturhinweise: Beishuizen (1993); Beishuizen & Klein (1997); Sundermann & Selter (1995).

D 18 Informelle Strategien zur Addition zu Beginn des 3. Schuljahrs

Hintergrundinformationen zu den angeführten Beispielen finden sich im Kapitel 3.4.

Literaturhinweis: Spiegel (1993).

D 19 Dennis und Sebastian bearbeiten „Kapitänsaufgaben"

Hintergrundinformationen zu dem Transkript finden sich im Kapitel 3.3.

Literaturhinweise: Baruk (1989); Freudenthal (1984); Radatz (1983); Selter (1994a); Stern (1992).

D 20 Zahlenketten – Vorgehensweisen von Drittklässlern

Für den mathematischen Hintergrund möchten wir dazu auf Selter & Scherer (1996) verweisen, für weitere Informationen didaktischer Art auf Scherer & Selter (1996) bzw. für das erste Schuljahr auf Scherer (1996). Stichwortartig wollen wir nur anmerken, dass es insgesamt 17 mögliche Startzahlpärchen gibt, die zu der Zielzahl 100 führen – vorausgesetzt, man lässt die 0 als Startzahl zu. Etwas ausführlicher wollen wir im Folgenden die Schülerlösungen aus dem Unterricht diskutieren (vgl. Scherer & Selter 1996).

Pinar hat die siebzehn Lösungen sehr systematisch untereinander geschrieben. Peter wählte von Anfang an recht große Zahlen. Bei der zweiten Aufgabe unterlief ihm vermutlich der Fehler, dass er den Übertrag der 10er-Stelle zusätzlich noch bei der 100er-Stelle berücksichtigte. Die beiden folgenden Zahlenketten beinhalten zwar die 100, jedoch nicht als Zielzahl. Nachdem er eine korrekte Lösung gefunden hatte (20, 20), versuchte er es im Weiteren häufiger mit jeweils gleichen Startzahlen. Dann zeigte sich der Reiz des „Spiels mit Zahlen": zunächst die Verwendung der Startzahlen 1, 1 und anschließend die Wahl glatter 100er-Zahlen. Seine Zielzahlen führten dabei im Übrigen jeweils über den „offiziell" bekannten 1000er-Raum hinaus. Abschließend konzentrierte er sich wieder auf das Erreichen der Zielzahl 100, indem er die Startzahlen operativ veränderte (z.B. Festhalten der ersten Startzahl und Erhöhen bzw. Erniedrigen der zweiten).

Mit Ausnahme der zweiten Aufgabe (3, 9) wählte Julia gemischte 10er-Zahlen: Nachdem das erste Startzahlpärchen (14, 26) zur Zielzahl 106 führte, verminderte sie – vermutlich unter Bezug auf diese Aufgabe – den ersten Summanden um 1 und den zweiten um 5, um durch diese Gesamtverminderung um 6 die gewünschte Zielzahl zu bekommen. Anschließend versuchte sie, diese durch Erhöhung einer der beiden bzw. beider Startzahlen um 1 zu erreichen. Nachdem sie eine Lösung gefunden hatte, wählte sie den Ansatz, die Summe beider Startzahlen unverändert zu lassen und (vermutlich) das Gesetz von der Konstanz der Summe anzuwenden.

Christina wählte anfangs gemischte 10er-Zahlen, erreichte aber stets zu große oder zu kleine Zielzahlen. Sie ging dann zu glatten 10er-Zahlen über und erhielt mit dem Startzahlpaar (50, 0) die erste Lösung. Anschließend betrachtete sie weitere 10er-Zerlegungen der 100 (dritte und vierte Zahl: (40, 60); (30, 70)) und berechnete die Zahlenketten (wahrscheinlich) rückwärts, was sie in ihrem vorletzten Beispiel zu einer (korrekten!) negativen Startzahl führte. Vermutlich wollte sie dann die beiden Startzahlen gegensinnig um 20 verändern, wobei sie bei der ersten Startzahl jedoch nicht das negative Vorzeichen beachtete.

Tim berechnete insgesamt 26 Zahlenketten. Als Startzahlen wählte er zunächst ausschließlich glatte 10er-Zahlen. Dabei brachte er wechselnde Strategien zum Einsatz, die sich meistens auf die vorangehende Aufgabe bezogen. So sind u.a. eine Reihe doppelter Lösungen zu erklären. Da die Wahl der glatten 10er lediglich in einem Fall zum Erfolg führte, ging er zu gemischten 10ern über. Er hielt dann meist eine Startzahl fest und variierte die andere Startzahl.

Literaturhinweise: s. o.

D 21 Zum Rechnen mit Nummern

Die abgedruckten Transkripte stammen aus dem von Thöne (1995) durchgeführten Projekt. Ein Interviewplan für ein Erkundungsprojekt zum Rechnen mit Nummern ist in Kap. 5.2 (E 6) abgedruckt. Dort finden sich auch ergänzende Informationen zu den in D 21 vorkommenden bzw. zu weiteren Aufgabenstellungen.

Zu Aufgabe 1: Eine Erklärung, die durch zahlreiche Erfahrungen mit anderen ähnlichen Aufgaben gestützt wird, ist die folgende: Die Kinder interpretieren die Aufgabe als eine, bei der die Differenz der gegebenen Zahlen zu berechnen ist, und ermitteln diese durch Abziehen oder Ergänzen. Es entspricht ja auch ihrer Erfahrung, dass bei einfachen Textaufgaben eine der vier Grundrechenoperationen verwendet wird. Dass Addition, Multiplikation bzw. Division hier nicht in Frage kommen, bedarf keines langen Überlegens.

Nicht ganz auszuschließen ist jedoch die Möglichkeit, dass die Kinder – durchaus verträglich mit dem gewöhnlichen, nicht immer eindeutigen Sprachgebrauch – den 4. Oktober als den letzten Schultag ansehen, an dem die Ferien begonnen haben, und diesen daher nicht als Ferientag mitgerechnet haben. Ob ein Kind so gedacht hat, kann durch Nachfrage festgestellt werden.

Die nachfolgend wiedergegebene Fortsetzung des Gesprächs mit Jennifer deuten wir so, dass sie zunächst den 4. als Ferientag ansah. Diese Annahme verwarf sie dann allerdings, wobei ihr der Sprachgebrauch zugute kam, als sie erkannte, dass sie so in einen Widerspruch zu ihrem Rechenergebnis geriet.

Zu Aufgabe 2 a: Jennifer beging hier den gleichen Fehler wie bei der obigen Aufgabe. Die Zahlen 13 und 23 wurden im Übrigen auch bewusst gewählt, um die Verlockung zu erhöhen, die Differenz zu berechnen. Erst bei der Frage bezüglich der Seiten 13 und 14 wich sie von ihrer Strategie ab, weil sie da unmittelbar sah, dass dies zwei Seiten waren.

Ich hab hier so einen Kalender … (holt den Kalenderstreifen herbei und legt ihn vor J) *da kannst du mal drauf gucken … kannst hier auch die Klötze benutzen, wenn du möchtest.*
(nach ca. 7 Sekunden) **Ja ich habe … ich hab hier zum 4. gerechnet bis … hierhin** (zeigt erst auf den 4. und dann auf den 7. im Kalenderstreifen).
Hm … Stell doch mal Klötze auf die Ferientage.
(stellt zuerst einen Kegel auf den 4., dann einen weiteren auf den 5.) **Nee… doch** (Nach Unsicherheit, den Kegel auf der 4 betreffend, greift sie zunächst zu einem dritten Kegel, nimmt jedoch dann den von der 4, stellt ihn auf die 6 und stellt den dritten Kegel auf die 7, so dass nebenstehendes Bild entsteht.)
Vorhin hattest du doch auch nen Klotz auf dem 4. stehen? (zeigt auf den 4. im Kalenderstreifen)
Ja, es sind aber nur 3 (lacht kurz).
Und warum hast du den da weggeräumt?
Weil der 4. … ähm … ich glaub, das ist der letzte Schultag vor den Ferien.
Ja … hier steht … in diesem Schuljahr haben unsere Herbstferien am 4. Oktober angefangen (I deutet dabei auf die Aufgabenkarte).
(nach ca. 6 Sekunden) **Dann sind es von 4 bis 7 sind 4.**

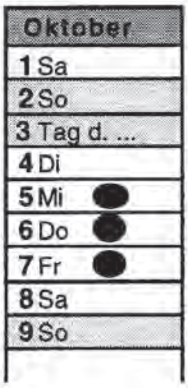


Abb. 13: Kalenderausschnitt

Dadurch geriet sie jedoch in Widerspruch zu ihrem vorherigen Ergebnis. Diesen löste sie allerdings nicht durch dessen Korrektur, sondern indem sie ihr Schema konsequent weiter benutzte. Dass ihr dabei nicht ganz wohl war, zeigte ihre letzte Reaktion.

Aber sie wusste sich auch hier zu helfen, wie man dem weiteren Verlauf des Gespräches entnehmen kann. Dabei kam ihr die Mehrdeutigkeit der Sprache zur Hilfe: Das, was gewöhnlich ein Blatt genannt wird, nennen wir manchmal auch eine Seite. Und wenn diese vorne mit der Seite 13 und hinten mit der Seite 14 bedruckt ist, dann hat man je nach Interpretation eine oder zwei Seiten gelesen.

Zur Aufgabe 2 b: Dennis hat wohl aus der dritten Aufgabe gelernt, dass – berechnet man die Differenz – sich ein zu kleines Resultat ergibt. Fälschlicherweise vermutete er daher, dass dabei beide Randzahlen nicht berücksichtigt wurden, und erhöhte zum Ausgleich die Differenz um 2.

Zu Aufgabe 3: Mit „erst gar nicht dazugezählt" wollte Christoph vermutlich ausdrücken, dass er zunächst 5 als Ergebnis ermittelte. Dann erinnerte er sich – vermutlich – daran, dass er bei den Aufgaben 3 und 5 gelernt hatte, dass die einfache Differenz bei diesen Aufgaben um 1 zu klein war. Aus diesem Grund erhöhte er sein Resultat um 1, was in diesem Fall zu einem falschen Ergebnis führte.

Zu Aufgabe 4: Wir vermuten, dass Romina zunächst – wie fast alle Kinder – die Zahlen einfach addierte. In dem Moment allerdings, in dem sie zu einer Erklärung aufgefordert wurde, entwickelte sie eine korrekte Vorstellung von der Situation. Diese hätte sie zu einem richtigen Ergebnis führen können, wenn sie den Widerspruch zu ihrem ersten Ergebnis bemerkt hätte.

Mit der Gummibärchenmaschine wurde eine analoge Situation mit simultan erfassbaren Anzahlen präsentiert, die es den Kindern ermöglichte, selbst herauszufinden, warum die Addition bei dieser Aufgabe nicht zu einem korrekten Ergebnis führte. 27 Kinder könnte man unter den gegebenen Randbedingungen nur dann erhalten, wenn man eins durchschneiden würde – ein Bild, das Romina benutzte um auszudrücken, dass man bei der Summenbildung ein Kind doppelt berücksichtigen würde.

Literaturhinweis: Spiegel (1989).

D 22 Viertklässler bearbeiten „Probleme der Woche"

Wir haben bewusst ein breites Spektrum an Lösungsmöglichkeiten zu beiden Aufgaben abgedruckt. Dieses reicht von Bearbeitungen, bei denen die vorhandenen Zahlenwerte anscheinend schematisch und ohne Beachtung des Kontexts miteinander verknüpft wurden, bis hin zu mathematisch sehr anspruchsvollen Lösungswegen. Sowohl die Aufgaben als auch die Lösungen der Schüler können unseres Erachtens ohne weiterführende Hinweise bearbeitet werden.

D 23 Fehleranalyse bei der schriftlichen Subtraktion

Die abgedruckten Schülerlösungen stammen aus dem von Schulte (1994) durchgeführten Projekt.

Fehllösungen im Mathematikunterricht entspringen nur selten einem zufälligen Verhalten der Schüler: Vielfach beruhen sie auf individuellen und für die Schüler sinnerfüllten Regeln und Lösungsstrategien (vgl. etwa Radatz 1980).

Wenn wir im Folgenden die Fehlerstrategien der vier Kinder skizzieren, beschreiben wir deren Vorgehensweisen vor dem Hintergrund einer Ergänzungsvorstellung.

Annika ergänzte korrekt, nahm allerdings einen Übertrag nur dann vor, wenn im Subtrahenden eine leere Stelle war.

Ein flüchtiger Blick auf die jeweils ersten beiden Zeilen in Johannas Lösung lassen (fälschlicherweise) Folgendes vermuten: Falls ein Übertrag erforderlich war, erhöhte sie in der entsprechenden Spalte den Minuenden um 10 und im nächstgrößeren Stellenwert den Subtrahenden um 1. Schaut man sich die Resultate an, so wird man gewahr, dass sie allerdings nicht die herkömmliche Technik des Erweiterns anwendete. Dieses kann man auch daran erkennen, dass sie an jeweils einer Stelle in der zweiten (2–2) bzw. der dritten Aufgabe (6–6) einen Übertrag sah, der vor dem Hintergrund der erwähnten Erweiterungsvorstellung nicht existieren konnte.

Des Rätsels Lösung: Johanna verwendete eine Mischform aus der Borge- und der Erweiterungstechnik, indem sie sowohl die Ziffer im Minuenden auf Kosten der links davon stehenden um 10 vergrößerte, als auch die Ziffer im nächstgrößeren Stellenwert des Subtrahenden um 1 erhöhte. Lediglich bei einer Leerstelle im Subtrahenden brachte sie diese Strategie nicht zum Einsatz. Johanna und Monika hatten, da sie erst seit einiger Zeit in Deutschland lebten, die Technik des schriftlichen Subtrahierens im Übrigen nicht gemäß dem bei uns vorgesehenen Normalverfahren gelernt.

Monika berücksichtigte den Übertrag (Borgen und Erweitern) jeweils dann doppelt, wenn zwei gleiche Ziffern untereinander standen, rechnete ansonsten korrekt, auch wenn Überträge zu machen waren. Die Schwierigkeit, dass im jeweils größten Stellenwert zweimal eine größere von einer kleineren Ziffer zu subtrahieren war, ein Übertrag aus offensichtlichen Gründen jedoch nicht möglich war, löste sie, indem sie einen „nicht vorhandenen Zehner borgte". Konsequenterweise hätte sie hier allerdings bei der zweiten Aufgabe eine 8 an der Hunderttausenderstelle eintragen müssen, da sie die Differenz von 10 – im Minuenden – und 2 – im Subtrahenden – hätte berechnen müssen.

Marcel ergänzte stets spaltenweise vom Minuenden zum Subtrahenden. War die untere Ziffer größer oder gleich groß, ergänzte er – gemäß seiner Rechenrichtung – korrekt, ohne Überträge in irgendeiner Form zu berücksichtigen. War die untere Ziffer kleiner oder befand sich dort eine Leerstelle, notierte er eine Eins und ergänzte so zur um 10 größeren Zahl bzw. zur 10.

Wenn man demnach die Aufgaben mit der jeweiligen Fehlerstrategie löst, so erhält man die folgenden Resultate:

a) Annika: 8063 (Annikas Lösung, möglich wäre aber auch: 9063), 59808, 42080
b) Johanna: 3246, 1238, 778
c) Monika: 41960, 80388
d) Marcel: 9652, 9612, 7459

Literaturhinweise: Bender (1994); Führer (1984); Gerster (1982); Padberg (1986, 138ff.); Radatz (1980); Radatz & Schipper (1983, 111ff.); Mosel-Göbel (1988).

D 24 Fehlermuster bei der schriftlichen Multiplikation

Zunächst möchten wir festhalten, dass viele der Rechnungen, die Marcel durchführte, korrekt sind. Fehler im Einmaleins und im Einspluseins haben wir nicht feststellen können.

Versucht man Marcels Lösungen ohne Zuhilfenahme der Nebenrechnungen zu verstehen, so kann man nach längerem „Knobeln" feststellen, dass er die Ergebnisse der Aufgaben 1a, 1d, 2a und 2b wie folgt ermittelt haben könnte: Er addierte zunächst die Ziffern des rechts stehenden Faktors und multiplizierte dann das Ergebnis mit dem links stehenden Faktor, indem er das übliche Verfahren benutzte.

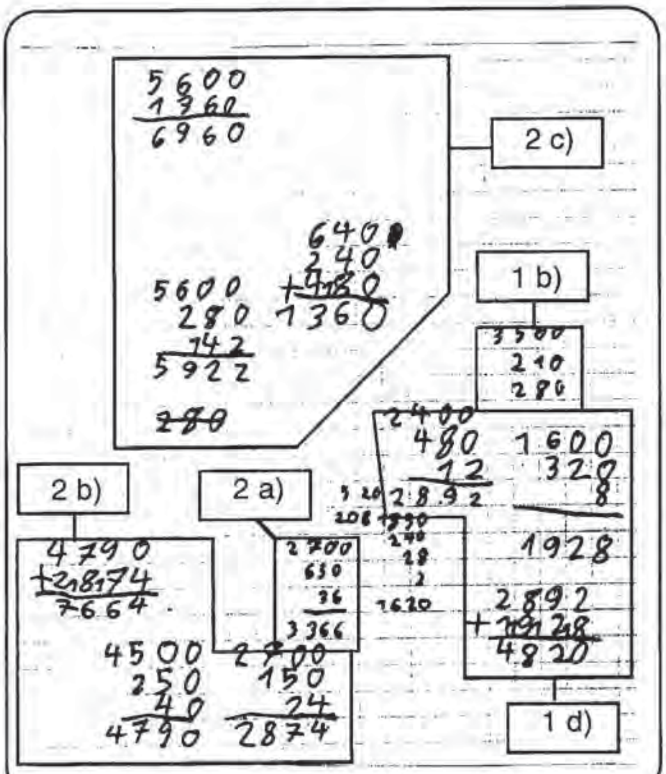
Dass zu 1a keine Nebenrechnung vorliegt, spricht dafür, dass er zumindest bei dieser Aufgabe tatsächlich so vorgegangen ist. Seine Nebenrechnung zu der Aufgabe 2a (2700+630+36) bestätigt das auch hier, wenn auch mit einer Einschränkung: Er multiplizierte tatsächlich 374 mit 9, aber nicht in der schriftlichen Endform, sondern halbschriftlich durch das schrittweise Abarbeiten der Hunderter, Zehner und Einer. Bei den Aufgaben 1d und 2b addierte er die Ziffern des rechten Faktors nicht, sondern multiplizierte sie einzeln jeweils mit den Hunderten, Zehner und Einern des linken Faktors. Er benutzte ein von der Struktur her korrektes halbschriftliches Verfahren mit dem einzigen Fehler, dass er die Stellenwerte der Ziffern des einen Faktors nicht berücksichtigte. Bei der Aufgabe 1b ging er ebenso vor, nur dass er 280 statt 28 notierte.

Bei 2 c berechnete er das Teilprodukt $846 \cdot 7$ korrekt. Bei $846 \cdot 6$ las er – durchaus verständlich – die 6 im zweiten Faktor vereinzelt als 8 und berechnete als Erstes $800 \cdot 8$. Zwar notierte er nur 640; es ist aber durchaus möglich, dass er zunächst 6400 geschrieben und dann die letzte 0 durchgestrichen hatte. Dann ermittelte er das Resultat des Produkts $40 \cdot 6$ korrekt mit 240, bevor er wohl erneut die 6 als 8 wahrnahm und $6 \cdot 8$ ausrechnete. Warum er hier allerdings

480 statt 48 angab, vermögen wir ebenso wenig zu erklären, wie die Tatsache, dass er nur mit dem ersten Summanden der links stehenden Summe und nicht mit deren Ergebnis weiterrechnete.

Bei der Aufgabe 1 c vermuten wir, dass Marcel ausnahmsweise schriftlich rechnete, da – so eventuell seine Überlegung – die Null in der Zehnerstelle des ersten Summanden keine Probleme mit Übertragsziffern bereiten würde. Erneut interpretierte er wohl die 6 der 608 als 8; zunächst berechnete er die erste Zeile korrekt. Auch in der zweiten Zeile begann er mit 56 richtig. Was ihn allerdings veranlasste die Zeile zu 44356 zu komplettieren, vermögen wir nicht zu sagen. Die Zugehörigkeit der Nebenrechnungen zu den Aufgaben haben wir in der Abbildung 14 verdeutlicht. Die dort nicht eingerahmten Zahlen stellen vermutlich eher Merkzahlen dar als zusammenhängende Rechnungen. Sie den einzelnen Aufgaben zuzuordnen wäre u. E. spekulativ.

Abb. 14: Marcels Rechenwege



Literaturhinweise: Gerster (1982); Padberg (1986, 164ff.); Radatz (1980); Radatz & Schipper (1983, 115ff.).

D 25 Schwierigkeiten beim Erklären der schriftlichen Division

Die abgedruckten Transkripte entstammen der Arbeit von Awater (1994). Zu Aufgabe 1: Eine der Grundideen des Algorithmus der schriftlichen Division besteht darin, die Wertziffern der jeweiligen Stellen des Ergebnisses jeweils in einem Schritt zu ermitteln. In der vorliegenden Rechnung war das für die Tausender schon erledigt, denn wenn man den verbliebenen Tausender durch 3 teilt, ist das Ergebnis kleiner als 1000. Das wollte die Lehrerin ausdrücken, als sie sagte: „Den einen Tausender kann man *als Tausender* gar nicht mehr durch drei teilen." Auf ihre Frage „In was wandelst du ihn dann um?" hätte sie gerne die Antwort „in Hunderter" gehört, so dass bei der nächsten Teildivision die Wertziffer der Hunderterstelle hätte ermittelt werden können.

Sebastian allerdings verstand ihre Frage vollkommen anders: Er dachte nicht stellenweise in Ziffern (nach dem Motto „1 kann man nicht durch 3 teilen"), sondern sah den Tausender als die *Zahl* 1000, die man sehr wohl durch drei teilen konnte. Er verstand das „Umwandeln" der Lehrerin somit als Teilen, denn nach dem Teilen hatten sich die 1000 ja auch in 333 verwandelt. Diese 333 können ja durchaus ein sinnvolles Zwischenergebnis bei einer halbschriftlichen Division sein, beim schriftlichen Normalverfahren passt diese Denkweise jedoch nicht zur oben genannten Grundidee.

Lucy („333 kommt da hin ... nein ... doch ...") ahnte dieses wohl. Denn wenn man 333 stellengerecht eintragen würde, wären alle Stellen schon besetzt und die Aufgabe gelöst. Dass das allerdings nicht sein konnte, war ihr vermutlich auch klar. Die Lehrerin griff dies jedoch nicht auf. Es blieben zwei schwer miteinander vereinbare Auffassungen: einerseits der unteilbare Tausender der Lehrerin, der allenfalls nach Umwandlung in Hunderter weiter geteilt werden konnte, und andererseits die 1000 der Kinder, die man sehr wohl – mit Rest versteht sich – durch 3 teilen konnte. Diese unterschiedlichen Sichtweisen bestimmten den weiteren Verlauf des Gesprächs, bis die Kinder am Ende aufgaben: Sebastian vermutete, die Lehrerin wollte aus dem einen Tausender drei machen, damit man weiter teilen könne, während Lucy annahm, sie wollte ihn in einen 999er umwandeln, damit man ohne Rest teilen könne.

Zu den Aufgaben 2 und 3: Dass die Aufgabe 966:3 vollständig ungeeignet ist für den Versuch, bei aufgeweckten Kindern Einsicht in die Vorgehensweise bei der schriftlichen Division zu erzeugen, liegt auf der Hand und hat mehr als nur einen Grund. Zumindest einen davon kann man im abgedruckten Gespräch mit Andrea, Britta und Lina erkennen. Den Schlüssel zum Verständnis des Geschehens liefert unseres Erachtens die nachfolgende Analyse:

Ein Bestandteil des üblichen Verfahrens, nämlich die Multiplikation des ermittelten Teilergebnisses mit dem Divisor (gewöhnlich als Probe bezeichnet; z.B. bei 30255:37=8 ... 8·37=296) und die anschließende Subtraktion machen nur dann einen Sinn, wenn erstens das Ergebnis durch Überschlag ermittelt wurde und daher kontrolliert werden muss, und wenn zweitens bei der jeweiligen Teildivision Reste entstehen, die man nicht mit bloßem Auge sieht.

Beides trifft in der Regel bei Aufgaben mit einstelligem Divisor nicht zu, insbesondere dann, wenn die Division bei jeder Stelle ohne Rest aufgeht. Dass z.B. 56:8=7 ist, wissen Kinder dann, wenn sie wissen, dass 7·8=56 ist. Die durchzuführende Multiplikation ist dann nicht die Probe, als die sie üblicherweise bezeichnet wird, sondern war bereits das Instrument zur Ermittlung des Ergebnisses. Wenn dabei kein Rest entstanden ist, warum sollte man dann, so eine mehr als berechtigte Frage, das Ergebnis dieser so genannten Probe überhaupt noch hinschreiben.

Analoges gilt für jede Aufgabe mit einstelligem Divisor. Sie schriftlich zu rechnen, ohne dass man die sogenannte Divisionsstaffel notiert, stellt keine höheren gedanklichen Anforderungen als die schriftliche Multiplikation mit einstelligem Multiplikator, bei der man sich ja auch die Überträge merken muss.

Literaturhinweise: Bender (1994); Gerster (1982; 1989); Padberg (1986, 186ff.); Radatz & Schipper (1983, 118ff.).

26 Zum Rechnen mit der Null

Die abgedruckten Schüleräußerungen stammen aus dem von Schröder (1993) durchgeführten Projekt.

Zu Aufgabe 2: Folgende Arten von Argumenten können unseres Erachtens unterschieden werden:

1. Man kann die Aufgabe gar nicht ausrechnen, daher hat sie kein Ergebnis (Susanne), was gleichbedeutend ist mit null (Michael, eventuell Lisette).
2. Nullmal eine Zahl (bzw. eine Zahl nullmal) bedeutet keinmal diese Zahl (bzw. diese Zahl keinmal), also nichts. Und nichts ist null. Der Unterschied zu 1. besteht darin, dass die Aufgabe ein Ergebnis hat, aber dieses Ergebnis Nichts bzw. null ist (Jana 2, eventuell Lisette).
3. 7·0=0+0+0+0+0+0+0=0 (Jana 1).
4. Vergleich mit 1·7: Zwei Multiplikationsaufgaben, die in einem Faktor übereinstimmen, im anderen aber nicht, können nicht dasselbe Ergebnis haben (Jenny).
5. „Faustregel": Bei der Multiplikation dominiert die Null über die anderen Zahlen (Alexander).

Zu Aufgabe 3: Der „Nichts"- oder „Keine Zahl"-Charakter, den die Null für die Kinder besitzt, kommt hier auf ganz andere Weise zur Geltung als bei Multiplikationsaufgaben mit zwei Faktoren: Ist erst mal ein Ergebnis ausgerechnet, dann ist die Null überflüssig und kann weggelassen werden, so dass sie auf das Ergebnis der Aufgabe 15·3 keine Auswirkung mehr hat. Häufig ist es ja im Übrigen auch möglich oder gar erwünscht, Nullen wegzulassen: etwa bei Dezimalzahlen oder dem schriftlichen Algorithmus der Multiplikation.

Zu Aufgabe 4: Für die meisten Schüler ist klar – und das wird durch ihre Grundschulerfahrung mit Divisionsaufgaben ja auch gestützt –, dass der Dividend immer größer sein muss als der Divisor. Das ist bei 0:5 nicht der Fall, also kann die Aufgabe nicht gerechnet werden und hat kein Ergebnis, was für Alexander, Matthias und André gleichbedeutend mit null war. Für Andreas war das keine hinreichende Begründung. Er rechnete jedoch die Probe zur Aufgabe 0:5=0. Und da 0·5 gleich 0 wäre, gälte auch 0:5=0.

Während Andreas und Alexander nicht mit eindeutig festzustellenden Vorstellungen operierten, verwendete Matthias eine Aufteil- (Wie oft passt die Null hinein?) und André eine Verteilvorstellung (Sachen durch Kinder teilen).

Auch für Michael war die Division der Null durch eine natürliche Zahl eigentlich nicht zulässig. Bei ihm wirkte sich der Nichtscharakter der Null jedoch dahingehend aus, dass der Divisor wiederum als Quotient angegeben wurde (0:10=10).

Zu Aufgabe 5: Matthias, Christoph und Jana arbeiteten mit der Aufteilvorstellung „Wie oft passt ...?" Matthias realisierte, dass weder 0 noch 5 die gesuchte Antwort sein konnte. Christoph war ein wenig verwirrt; vielleicht ahnte er schon, dass die 0 unendlich oft in die 5 hineingeht. Auch Jana erschien ratlos, aber eher, weil sie zunächst an „fünfmal" als Antwort dachte, aber dann ähnlich wie Jenny in Aufgabe 2 einen Widerspruch zu 5:1=5 sah.

Agniezka und André (am Schluss) arbeiteten mit der Verteilvorstellung. Agniezka argumentierte wie Nicole (Aufgabe 6) und erhielt daher als Ergebnis 5. Für André war das nicht so offensichtlich („geht ja schlecht"). Und die Bezugnahme auf die Probe hatte für ihn die Konsequenz, dass das Ergebnis weder 5 noch 0 sein konnte.

Zu Aufgabe 6: Wir verweisen auf Spiegel (1995).

Literaturhinweise: Hefendehl-Hebeker (1981; 1982); Klöpfer (1979); Rotman (1985); Wagner et al. (1991; 1992).

D 27 Schülerlösungen als Anlässe zum Mathematiktreiben

Im Weiteren wollen wir einige Erläuterungen zum mathematischen Hintergrund der drei Problemstellungen geben, ohne dabei in die Tiefe zu gehen. Bei der Aufgabe 1 hilft eine systematische Auflistung, bei der man beispielsweise den ersten Summanden fix lässt und die anderen beiden systematisch variiert. Für die Aufgabe b könnte diese so aussehen:

80 + 10 + 10	70 + 20 + 10	60 + 30 + 10	50 + 40 + 10	usw.
	70 + 10 + 20	60 + 20 + 20	50 + 30 + 20	
		60 + 10 + 30	50 + 20 + 30	
			50 + 10 + 40	

Will man nur die Gesamtzahl der Zerlegungen wissen, kann man die elementare Kombinatorik zu Hilfe nehmen. Jede solche Zerlegung lässt sich dadurch erhalten, dass man von den neun Pluszeichen in dem Term 10+10+10+10+10+10+10+10+10+10 genau zwei auswählt, die man eliminiert, z.B. das dritte und das letzte: 10+10+10/10+10+10+10+10+10/10. Die zu dieser Auswahl gehörende Zerlegung ist: 30+60+10. Umgekehrt gehört zu jeder solchen Zerlegung eine solche Auswahl. Also gibt es genauso viele Zerlegungen, wie es Möglichkeiten gibt, aus den 9 Pluszeichen 2 auszuwählen und das sind 36 $(=(9 \cdot 8):(1 \cdot 2))$.

Bei Aufgabe 2 möchten wir verweisen auf die entsprechenden Ausführungen zum mathematischen Hintergrund in Wittmann & Müller (1995, 99 ff.).

Bei Aufgabe 3 besteht eine elegante Lösung darin, die Anzahl der möglichen Zerlegungen einer Zahl in zwei Faktoren als eng verwandt mit der Anzahl aller Teiler dieser Zahl zu sehen: Für die 12 beispielsweise existieren die Produkte $1 \cdot 12$, $2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 3$, $6 \cdot 2$, $12 \cdot 1$, deren jeweils erste Faktoren die Teiler von 12 repräsentieren. Um das höchste Haus zu finden muss man demnach diejenige Zahl des Hunderterraums mit den wenigsten (sicherlich die 1) bzw. mit den meisten Teilern finden. Ausführungen zur Bestimmung der Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl finden sich beispielsweise in Neubrand & Möller (1991, 139ff.) oder Scheid (1992, 36ff.).

Literaturhinweis: Selter (1997a)

Das Alphabet seitwärts

Maxim (6) und ich sitzen im Kinderzimmer auf dem Boden. „Heute muss ich mich aber beeilen", sage ich und weiß, dass er heraushört, dass ich nicht mehr lange mit ihm spielen kann. „Ich muss gleich zur Uni fahren!" „Wieso zur Uni?", fragt Maxim. „Heute ist doch Samstag." „Ja", gebe ich zur Antwort, „aber die Studenten schreiben heute eine Klausur und da muss ich aufpassen." „Was ist denn eine Klausur?" „Eine Klausur ist so etwas wie eine Klassenarbeit ...", versuche ich zu erklären, merke aber, dass davon bei ihm nicht so viel ankommt. „Also, da stelle ich den Studenten Rechenaufgaben und die müssen die richtige Lösung finden!" „So 3+7 ist gleich 10, oder so, ne?" „Nein, schwierigere Aufgaben!" „So Milliontrilliardenmillionen plus Million plus Million?" „Ja, ungefähr so!" „Oder mit dem Alphabet, ne?" Ich bin etwas überrascht und wiederhole mit deutlich zweifelndem Unterton: „Mit dem Alphabet? Das hat doch nichts mit Mathe zu tun!" „Doch, doch", beharrt Maxim, „das Alphabet vorwärts aufsagen oder rückwärts oder seitwärts!" „Seitwärts?" „Ja, seitwärts. Da sucht man den mittelsten Buchstaben und fängt bei dem an. Die Mitte finden ist doch Mathematik. Weißt du das denn nicht? Du bist doch Mathematiker", sagt er und amüsiert sich königlich über meine Unwissenheit. Ich mich auch.

Christoph Selter

Hanneke und die Pfannkuchen

Wir fahren mit der sieben Jahre alten Hanneke und ihren Freundinnen Ine und Marion ins Pfannkuchenhaus. Von unseren letzten Besuchen wissen die Kinder, dass die Pfannkuchen so groß sind, dass sie keinen ganzen aufessen können. Sie beschließen daher, zu dritt zwei Pfannkuchen zu bestellen. Ich frage Hanneke: „Wie viel bekommt denn dann jeder?" Nach einigem Nachdenken antwortet sie: „Eine halbe Stunde und zehn Minuten." Auf Anhieb haben wir das nicht verstanden.

Adri Treffers

ZWEI STUNDEN ZUM SPIELEN

Zwei Jungen spielten draußen. Einer von den beiden fragte eine Person, die vorbeikam, nach der Uhrzeit. „Es ist 4 Uhr", antwortete diese. „Oh, ich muss um 5 Uhr zu Hause sein. Wie lange kann ich dann noch spielen?" „Eine Stunde noch." Der andere Junge fragte auch nach: „Und ich?" „Wann musst du denn zu Hause sein?" „Um 5 Uhr." „Na, dann hast du auch noch eine Stunde." Als die Person dann weiterging, sagte der eine Junge zu dem anderen: „Das ist prima! Jetzt können wir noch zwei Stunden spielen."

Adri Treffers

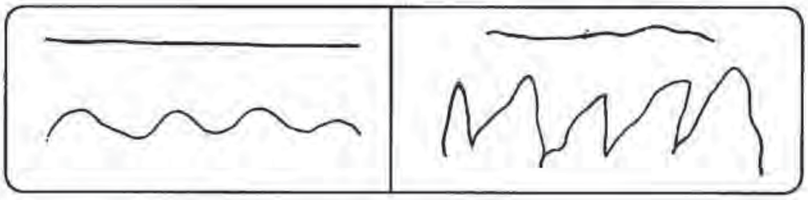
DARIA

Daria (5) wurde gefragt, ob sie rückwärts zählen könne. Sie zählte rückwärts von zwölf an bis zur Null. Auf die Frage, ob vor der Null denn irgendetwas käme, antwortete sie zunächst mit Nein. Als ich nachhakte „Wirklich nicht?", überlegte sie kurz und sagte dann: „Doch, Monate!" Dann erklärte sie: „Das ist doch immer so, wie bei der Rosa. Die war zuerst 1 Monat, 2 Monate … und dann kommt irgendwann 1 Jahr … und sie hatte Geburtstag, und dann zählt man immer normal weiter."

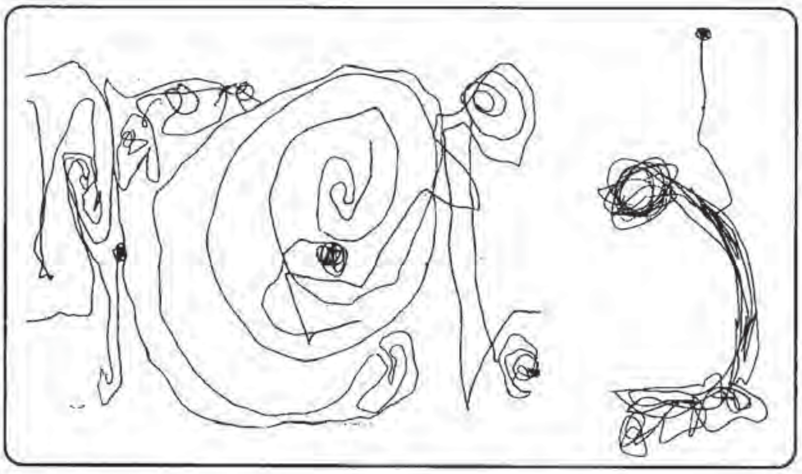
Ute Hagedorn

Der längste Strich

Ich war für ein paar Tage unterwegs und habe für Maxim (5) und Beate Marzipankartoffeln mitgebracht – eigentlich zum Naschen. „Die musst du gerecht teilen!", sage ich zu Maxim, immer bestrebt, ihn die natürlichen Rechenanlässe des Alltags selbst bewältigen zu lassen. Abwechselnd gibt er Beate und sich selbst jeweils eine Süßigkeit. Beide haben nun sieben kleine Kugeln vor sich liegen. Beate kann nicht widerstehen, die Kartöffelchen in zwei Reihen zu jeweils sieben vor sich bzw. vor Maxim hinzulegen und zu fragen: „Wer hat mehr? Ich oder du?" „Wir haben beide gleich viel, hab ich doch ausgerechnet!" Nun zieht sie ihre Reihe etwas auseinander, so dass sie fast anderthalbmal so lang ist wie Maxims. „Wer hat jetzt mehr: Ich oder du?" „Immer noch gleich viel!" Für Maxim ist das überhaupt kein Problem. Sie schiebt ihre Reihe zusammen oder ordnet die Marzipankartöffelchen im Kreis an; ihre Frage braucht sie nicht mehr zu stellen, Maxim tut stets kund, dass es gleich viele seien, weil sie ja keine weggenommen oder hinzugefügt habe. „Stell mir doch mal 'ne schwere Aufgabe!", bittet er. Beate nimmt sich ein Blatt Papier und einen Bleistift, zeichnet zwei Striche und fragt ihn, welcher länger sei.



„Das soll schwer sein – ist doch 'ne Babyaufgabe!" Er deutet auf den unteren Strich und erklärt: „Der ist länger, weil beide fangen gleich an und hören gleich auf, aber der ist schlängeliger!" Da wir ihn anscheinend nicht herausfordern können, dreht er den Spieß um: „Jetzt stell ich euch mal 'ne Aufgabe!" Er malt zwei Striche und stellt uns dieselbe Frage, die er eben beantwortet hat. Wir geben zusammen eine Erklärung, die ihn zufrieden stellt. „Aber das war ja auch baby für euch. Jetzt kommt mal 'ne schwere Aufgabe. Welcher Strich ist länger?" Und er zeichnet zwei neue Linien, bei denen er den Anfangspunkt jeweils ganz deutlich markiert.



Wir sind überfordert und geben zu, dass wir es nicht wissen. „Weißt du denn die Antwort?", fragt Beate. „Ja klar", sagt Maxim und deutet auf den linken Strich, „der ist länger." Wir müssen es ihm wohl glauben.

Christoph Selter