

Mathematisches Begründen

Daniel

Daniel besucht die 6. Klasse, und seine Vorgehensweise zur Lösung der Aufgabe sieht folgendermaßen aus:

Zehner Z	Einer E	Zehntel z	Hundertstel h	Dezimalzahl ,
●●●	●	●●●●	●●●	31,43
○●	●○	○○○○	○○○	22,43
○●	○	●○○○	○○○	21,53
○○	○	○○○○	●○○○	21,44
○○○	·	●○○○	○○○	30,53
○○○		○○○○	●○○○	30,44
●○○○		○○○○	○○○	40,43
○○○	○	○○○	●○○○	31,34
●○○○	○	○○○	○○○	41,33
○○○	●○	○○○	○○○	32,33
●○○○	○	○○○○	○○	41,42
○○○	●○	○○○○	○○	32,42
○○○	○	●○○○○	○○	31,92

Daniels Vorgehensweise:

Daniels Systematik war aufgrund der konsequenten Durchführung leicht und einsichtig nachzuvollziehen. Er nahm von der Zehnerspalte ein Plättchen weg und fügte es dann jeweils in die Einer-, Zehntel- und Hundertstelspalte hinzu. Im nächsten Schritt begann er mit der Einerspalte: Hier nahm er ein Plättchen weg, um es analog zum ersten Durchgang in die verbleibenden anderen Spalten einzufügen. Es folgte dasselbe Vorgehen ausgehend von der Zehntel- und Hundertstelspalte. Damit hatte er konsequent alle Möglichkeiten ausgeschöpft.

Daniels Begründung:

Weil pro Plättchen gibt es nur 3 wege.

[Weil pro Plättchen gibt es nur 3 Wege.]

Auch seine Begründung deutete darauf hin, dass er die Aufgabe richtig verstanden hatte. Er erkannte und benannte die drei Lösungsmöglichkeiten („Wege“), konnte sie aber nicht begründen. Für eine vollständige Begründung hätte er berücksichtigen müssen, dass es 4 Spalten gibt und somit 3 mal 4 Möglichkeiten insgesamt.

Judith

Judith besucht die 3. Klasse, und ihre Vorgehensweise zur Lösung der Aufgabe sieht folgendermaßen aus:

Hunderter H	Zehner Z	Einer E	Zahl
● ● ●	● ● ● ●	● ●	342
00	00 000	00	252
000	000	000	333
000	0000	000	243
0000	000	00	432
000	00000	0	351
00	0000	0000	236

Judiths Vorgehensweise:

Judith fand fünf von den sechs möglichen Zahlen, indem sie teilweise systematisch vorging. Sie begann zunächst systematisch, indem sie ein Plättchen von der Hunderter- in die Zehnerspalte und im nächsten Schritt ein Plättchen von der Zehner- in die Einerspalte verschob. Hiernach war keine Systematik in ihrer Vorgehensweise erkennbar, womit auch zu erklären war, dass sie eine Möglichkeit nicht fand. Sie vergaß, ein Plättchen von der Einer- in die Hunderterspalte zu verschieben.

Judiths Begründung:

*Ich habe alle Zahlen einmal
miteinander verschoben*

[Ich habe alle Zahlen einmal miteinander verschoben.]

Die Begründung von Judith ist nicht eindeutig. Ihre Begründung ist sprachlich nicht korrekt, da nicht Zahlen, sondern Plättchen verschoben wurden. Vermutlich meinte Judith, dass sie von jedem Stellenwert ein Plättchen in die anderen beiden verschoben hatte. Judith beschrieb ihre Vorgehensweise und begründete nicht die Zusammenhänge. Es wird nicht deutlich, warum keine weiteren Zahlen gelegt werden konnten.

Lara

Lara besucht die 3. Klasse, und ihre Begründung bezieht sich auf die folgende Vorgehensweise:

Hunderter H	Zehner Z	Einer E	Zahl
● ● ●	● ● ● ●	● ●	342
00	0000 0	0 0	252
000	000	000	333
000	00000	0	351
0000	000	00	432
00.	0000	000	243
0000	0000	0	441

Laras Vorgehensweise:

Lara fand alle sechs möglichen Zahlen, indem sie systematisch voring. Ihre Strategie war, von einer Stelle ausgehend immer ein Plättchen in die Nachbarstelle zu verschieben. Zunächst verschob sie ein Plättchen von der Hunderter- in die Zehnerstelle. Im nächsten Schritt verschob sie ein Plättchen von der Zehner- in die Einerstelle. Anschließend legte sie ein Plättchen von der Einer- in die Zehnerstelle und dann von der Zehner- in die Hunderterstelle.

Laras Begründung:

Ich habe über al einz weg und irgendwo ein hin getahn;

[Ich habe überall eins weg und irgendwo ein hin getan.]

Schaut man sich nun die Begründung von Lara an, dann wundert man sich, dass sie erklärt, dass sie ein Plättchen irgendwo hingetan hat. Die Vorgehensweise von Lara zeigt nämlich, dass sie systematisch voring und nicht, wie sie es darstellt, unsystematisch.

Justin

Dieser Schüler ist in der 6. Klasse, und seine Vorgehensweise zeigt folgende Abbildung:

Zehner Z	Einer E	Zehntel z	Hundertstel h	Dezimalzahl ,
000	0	000	0000	31,34
000		0000	000	30,53
00	00	0000	000	22,43
0000		0000	000	40,43
000	00	000	000	32,33
000	00	0000	000	32,32
00	0	0000	0000	21,44
000		0000	0000	30,44
0000	0	0000	00	41,42
000	0	00000	00	31,52
000	00	0000	00	32,42
0000	0	000	000	41,33

Justins Vorgehensweise:

Hier war für den Betrachter keine eindeutige Linie zu erkennen. Seine Systematik war nicht nachvollziehbar; dennoch kam er offensichtlich ohne große Schwierigkeiten zum Ziel. Obwohl er eine Zeile falsch löste (32,32), war seine Fähigkeit, alle mathematischen Möglichkeiten präsent zu haben, zu erkennen. Bezeichnend war, dass seine Begründung mathematisch korrekt war. Das legte die Vermutung nahe, dass die Aufgabenstellung für ihn bereits theoretisch lösbar war.

Justins Begründung:

weil es mathematisch nicht geht
 Mann hat pro Spalte nur 3 Möglichkeiten da
 man 4 Spalten hat, hat man $4 \cdot 3 = 12$
 Möglichkeiten

[Weil es mathematisch nicht geht. Man hat pro Spalte nur 3
 Möglichkeiten, da man 4 Spalten hat, hat man $4 \cdot 3 = 12$
 Möglichkeiten.]

Er konnte mathematisch-logisch, kombinatorisch mit Zahlen und deren Stellenwert umgehen, sodass er wusste, dass es pro Spalte drei Möglichkeiten gab, weil es vier verschiebbare Stellenwerte gibt.

Lena

Diese Schülerin besucht die 6. Klasse, und ihre Vorgehensweise zur Lösung der Aufgabe sieht folgendermaßen aus:

Zehner Z	Einer E	Zehntel z	Hundertstel h	Dezimalzahl
000	0	0000	000	31,43
00	00	0000	000	22,43
00	0	00000	000	21,53
00	0	0000	0000	21,46
000		00000	000	30,53
000		0000	0000	30,44
000	0	000	0000	31,34
000	0	00000	00	31,52
000	00	0000	00	32,42
0000	00	0000	00	41,42
0000	0	000	000	41,33
0000	0	000	000	40,33

Lenas Vorgehensweise:

Sie nahm von der Zehnerspalte ein Plättchen weg und fügte es dann jeweils in der Einer-, Zehner- und Hundertstelspalte hinzu. Im nächsten Schritt begann sie mit der Einerspalte: Hier nahm sie ein Plättchen weg, um es analog zum ersten Durchgang in die verbleibenden anderen Spalten einzufügen. Allerdings vergaß sie bei diesem Durchgang, das Plättchen in die Zehnerspalte zu schieben. Danach nahm sie ein Plättchen von der Zehntelspalte und schob es nun in die Hundertstelspalte. Die anderen Verschiebungsmöglichkeiten berücksichtigte sie nicht. Anschließend nahm sie ein Plättchen von der Hundertstelstelle und verschob es in alle möglichen Spalten. In den letzten beiden Schritten versuchte sie, die fehlenden Möglichkeiten zu finden.

Lenas Begründung:

weil ich von vorne nach hinten und
umgekehrt es gemacht habe und
wenn ich noch einmal getan würde
dann hätte ich das gleiche

[Weil ich von vorne nach hinten und umgekehrt es gemacht habe und wenn ich noch einmal tun würde, dann hätte ich das Gleiche.]

Lena war ein Beispiel dafür, dass sie die mathematische Lösung gefunden hatte, aber deren Bedeutungszusammenhang nicht unbedingt erkannt haben muss, jedenfalls war es aus ihrer Begründung nicht ersichtlich. Diese war eher eine Beschreibung dessen, was sie getan hatte; nicht mathematisch formuliert, sondern als eine Lageverschiebung „von vorne nach hinten und umgekehrt“. Eine solche Begründung könnte auch von einem Drittklässler stammen.