



Thema: „Prozessbezogene Kompetenzen – „Summen von Reihenfolgezahlen“

Zeitpunkt: ab Anfang 4. Schuljahr
zeitlicher Umfang: circa 35-45 Minuten
Material: Aufgabenkarten, leere Blätter, Eddings, Schere, Klebstoff

Hintergrundwissen:

Prozessbezogene Kompetenzen

In den Bildungsstandards unterscheidet man zwischen fünf allgemeinen bzw. prozessbezogenen Kompetenzen: dem Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren und Darstellen (vgl. KMK, 2004). Der Lehrplan des Landes Nordrhein Westfalen fasst diese zu vier Kompetenzbereichen, dem Problemlösen, Modellieren, Argumentieren und Kommunizieren/Darstellen zusammen (vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW, 2008, S. 57 f.). Im Interview geht es um die Erfassung der Kommunikations- und Darstellungskompetenzen sowie der Argumentationskompetenzen von Kindern des 4. Schuljahres bei der Bearbeitung des Aufgabenformates „Summen von Reihenfolgezahlen“. Der Kernlehrplan NRW (ebd., S. 8) sieht für diese Kompetenzbereiche u.a. folgendes vor:

Argumentieren

„Die Schülerinnen und Schüler stellen begründet Vermutungen über mathematische Zusammenhänge unterschiedlicher Komplexität an und erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten (sprachlich, handelnd, zeichnerisch).“

Kommunizieren/ Darstellen

„Die Schülerinnen und Schüler stellen eigene Denkprozesse oder Vorgehensweisen angemessen und nachvollziehbar dar [...]. Dies kann sowohl verbal in mündlicher oder schriftlicher Form als auch durch den Einsatz von anderen Darstellungsformen wie Skizzen, Tabellen usw. geschehen.“

Summen von Reihenfolgezahlen

Summen von Reihenfolgezahlen	Keine Reihenfolgezahlen
2+3+4+5+6	2+3+4+5+4+3
111+112+113+114	100+200+300
21+22+23+24	3+5+6
1+2	
69+70	

Im Kontext der Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen (Reihenfolgezahlen) lassen sich verschiedene, unterschiedlich anspruchsvolle Probleme stellen. Im Interview erhalten die Kinder nach einer kurzen Einführung der Reihenfolgezahlen die Aufgabe, alle Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen zu finden, deren Resultat nicht größer als 20 ist. Insgesamt gibt es 19 Aufgaben, die diese Bedingung erfüllen:

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1+2		2+3		3+4		4+5		5+6		6+7		7+8		8+9		9+10	
			1+2+3			2+3+4			3+4+5			4+5+6			5+6+7		
							1+2+3+4				2+3+4+5				3+4+5+6		
												1+2+3+4+5					2+3+4+5+6



Mögliche Vorgehensweisen der Kinder

Nach Schwätzer und Selter (2000) lässt sich bei vielen Schülerinnen und Schülern zu Beginn der Interviews beobachten, dass sie zunächst einmal ausprobieren bzw. diejenigen Möglichkeiten nennen, die ihnen spontan einfallen. Nach einer gewissen Anlaufzeit jedoch sind die nachfolgend aufgelisteten, systematischeren Findestrategien zu beobachten:

Strategie	Beschreibung
1. Hinten verlängern	An eine Summe wird der ‚folgende‘ Summand angehängt ($3+4+5 \rightarrow 3+4+5+6$)
2. Vorne verlängern	Einer Summe wird der ‚vorangehende‘ Summand vorangestellt ($3+4+5 \rightarrow 2+3+4+5$)
3. Hinten verkürzen	Der letzte Summand einer Summe wird entfernt ($3+4+5 \rightarrow 3+4$)
4. Vorne verkürzen	Der erste Summand einer Summe wird entfernt ($3+4+5 \rightarrow 4+5$)
5. Alle erhöhen	Alle Summanden werden um 1 erhöht ($3+4+5 \rightarrow 4+5+6$)
6. Alle vermindern	Alle Summanden werden um 1 vermindert ($3+4+5 \rightarrow 2+3+4$)
7. Mit ‚Nachfolger‘ beginnen	Die neue Summe beginnt mit dem Nachfolger des größten Summanden der bereits gefundenen Summe ($2+3+4 \rightarrow$ Summe mit 5 als erstem Summanden, z. B. $5+6+7$)
8. Mit ‚letzter Zahl‘ beginnen	Als erster Summand wird der letzte Summand einer bereits gefundenen Summe verwendet ($3+4+5 \rightarrow$ Summe mit 5 als erstem Summanden, z. B. $5+6$).
9. Mit Ergebnis beginnen	Als erster Summand wird das Ergebnis einer bereits gefundenen Summe verwendet ($3+4+5 \rightarrow$ Summe mit 12 als erstem Summanden, also $12+13$).
10. Durchmustern der ersten Summanden	Es wird geprüft, ob sämtliche Zahlen kleiner als 5 als erster Summand vorkommen. Sollte eine dieser Zahlen noch nicht als erster Summand vorkommen, so beginnt die nächste Summe mit eben dieser.
11. Kombinationen verschiedener Vorgehensweisen	Es wird „hinten verlängert“ und „vorne verkürzt“ ($3+4+5 \rightarrow 3+4+5+6 \rightarrow 4+5+6$). Oder Dieselbe Operation wird mehrfach hintereinander ausgeführt ($3+4 \rightarrow 3+4+5 \rightarrow 3+4+5+6$).

Die wiederholte Nutzung einer Vorgehensweise erfolgt in der Regel so lange, bis die Schüler/innen an eine „Grenze“ stoßen (das Ergebnis 20 wird erzielt bzw. überschritten oder Summen enthalten mit 1 als erstem Summanden). Zudem werden die Strategien häufig nicht konsequent, sondern wechselhaft springend angewendet.

Allgemeine Hinweise

Die im Leitfaden angegebenen Formulierungsvorschläge können während des Interviews als Orientierungshilfe dienen. Die Fragestellungen müssen jedoch ggf. dem Kind angepasst werden.



Das Interview

1. Verstehen der Aufgabenstellung:	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen				
1. Kurze Erläuterung der Reihenfolgezahlen: Heute geht es um Plusaufgaben aus Reihenfolgezahlen. $3+4+5=12$ (vorlegen) ist z.B. eine Plusaufgabe aus Reihenfolgezahlen.	Dem Kind werden nacheinander drei Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen vorgelegt. (Material: Aufgabekarten 1.1)				
2. Kannst du mir 2 Plusaufgaben aus Reihenfolgezahlen sagen?					
3. Sieh dir einmal die Aufgabe an (jeweils eine Aufgabe vorlegen). Ist das auch eine Plusaufgabe aus Reihenfolgezahlen? - Warum nicht? <table border="1" data-bbox="285 891 588 1016"><tr><td>$31+32=$</td></tr><tr><td>$4+5+6+8=f.$</td></tr><tr><td>$20+30+40= f.$</td></tr><tr><td>$99+100+101=$</td></tr></table>	$31+32=$	$4+5+6+8=f.$	$20+30+40= f.$	$99+100+101=$	Um zu überprüfen, ob das Kind verstanden hat, was Reihenfolgezahlen sind, wird es gebeten anhand einiger Beispiele falsche und richtige Summen aus Reihenfolgezahlen zu identifizieren (Material: Aufgabekarten 1.2).
$31+32=$					
$4+5+6+8=f.$					
$20+30+40= f.$					
$99+100+101=$					

Aufgabe 2: Reihenfolgezahlen deren Summe kleiner gleich 20 ist finden.	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
1. Finde möglichst viele Aufgaben aus Reihenfolgezahlen. Das Ergebnis soll nicht größer sein als 20.	Kind sucht nach Lösungen und soll diese auf einem Blatt notieren. Dem Kind sollte ein 2. Blatt untergeschoben werden, sobald die "blinde" Produktion stockt und das Kind beginnt systematisch vorzugehen. <u>Lösung:</u> Es gibt insgesamt 19 verschiedene Summen für die die Bedingung kleiner gleich 20 zutrifft. <ol style="list-style-type: none">1. Summen aus 2 Summanden: $1+2, 2+3, \dots, 9+10$2. Summen aus 3 Summanden: $1+2+3, 2+3+4, \dots, 5+6+7$3. Summen aus 4 Summanden $1+2+3+4, 2+3+4+5, 3+4+5+6,$4. Summen aus 5 Summanden $1+2+3+4+5, 2+3+4+5+6$ <u>Anregungen zur Produktion weiterer Lösungen und gleichzeitiger Übergang zu Aufgabe 3:</u> <ul style="list-style-type: none">• Bist du dir sicher, dass du alle gefunden hast?



Aufgabe 3: Begründungen finden.	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
<p>Wie kann man denn zeigen, dass es wirklich alle Möglichkeiten sind?</p> <p>oder</p> <p>Zeig mir einmal, warum das wirklich alle Möglichkeiten sind.</p>	<p>Das Kind wird darum gebeten die Vollständigkeit zu begründen. (Hilfsmittel: leere Blätter, Schere, Klebstoff)</p> <p>Vorgehen I. d. R. spontanes Sortieren der gefundenen Lösungen (geordnetes Abschreiben oder Ausschneiden und Umordnen)</p> <p><u>Sortiermöglichkeiten</u></p> <ol style="list-style-type: none">1. Hauptkriterium: erster Summand/Nebenkriterium: Anzahl der Summanden (diagonale Lesart)2. Hauptkriterium: die Anzahl der Summanden (spaltenweise Lesart).3. Prinzipiell ist auch die Sortierung nach Ergebnissen denkbar, aber eine Begründung der Vollständigkeit ist dann nur schwer möglich, wenn die Summen nicht tabellarisch angeordnet werden. <p><u>Mögliche Hilfestellung:</u> Versuche deine gefundenen Aufgaben zu ordnen. Versuche einmal eine Tabelle anzulegen (dies ist allerdings nur dann der Fall, wenn sie den Einsatz von derartigen Hilfsmitteln gewohnt sind).</p> <p><u>Mögliche Begründung:</u> Es gibt keine Aufgabe mit 6 Zahlen, weil $1+2+3+4+5+6$ (die kleinste mögliche Summe) schon größer als 20 ist. Die anderen Plusaufgaben wurden vom Kind tabellarisch oder geordnet nach der Anzahl der Summanden aufgeschrieben. Es gibt keine Aufgaben mehr mit 2,3,4 oder 5 Zahlen.</p> <p>Wichtig: Es ist nicht zu erwarten, dass alle Kinder ausreichende Begründungen finden werden!!!</p>

Literatur:

Schwätzer, U. & Selter, Chr. (2000): Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen –eine Unterrichtsreihe für das 4. bis 6. Schuljahr. In: Mathematische Unterrichtspraxis, H. 2, 2000, S. 28–37. Verfügbar unter:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/selter/material/Aufsaeetze-CS-Scans/RFZ.PDF(Abruf am 19.08.2008)

Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW (Hrsg.) (2008): Lehrplan Mathematik für die Grundschulen des Landes NRW. Verfügbar unter:
http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_gs/LP-Mathematik_Stand_28.7.08.pdf (Abruf am 19.08.2008)

KMK (Kultusministerkonferenz): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. Verfügbar unter:
http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Grundschule_Mathematik_BS_307KMK.pdf (Abruf am 02.08.2008)



Erklärung des Aufgabenformates

Aufgaben 1.1

$$3+4+5= 12$$

$$28+29+30= 87$$

$$7+8= 15$$

Aufgaben 1.2

$$31+32=$$

$$20+30+40=$$

$$99+100+101=$$

$$4+5+6+8=$$

$$22+23+24=$$