Wahrscheinlichkeiten einschätzen lernen am Beispiel eines Glücksspiels mit Ziffernkarten

Zeitpunkt:	4. Schuljahr
Zeitlicher Umfang:	30 – 45 Minuten
Material:	Beutel, Ziffernkarten (mit den Ziffern 1 bis 4 sowie 1 bis 5), Spielfeld, Goldmünzen (aus Plastik), Papier für Aufzeichnungen, Stifte, Strukturierungshilfe „Maltabelle“

Mathematischer Hintergrund

Die Gewinnchancen bei Glücksspielen hängen von den Gewinnregeln und den Wahrscheinlichkeiten für die Einzelergebnisse ab.

Wahrscheinlichkeiten geben an, mit welchem Grad an Wahrscheinlichkeit ein zufälliges Ergebnis eintreffen wird. Allgemein lässt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen, indem man den Quotienten aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen und der Anzahl aller möglichen Versuchsausgänge bestimmt. Dabei erhält man Werte zwischen 0 und 1. Der Wert 1 besagt, dass ein Ereignis auf jeden Fall, also **sicher**, eintreten wird. Der Wert 0 zeigt an, dass ein Ereignis niemals eintreten wird, also **unmöglich** ist. Ereignisse, die so einen Wert zwischen 0 und 1 zugewiesen bekommen, gelten als **wahrscheinlich**, wobei hier durch die Nähe zu einer der beiden Randzahlen eine Tendenz in Richtung sicher oder unmöglich angezeigt wird. Für die Grundschule sollte man sich auf die Verwendung der Begriffe sicher, wahrscheinlich und unmöglich beschränken und auf die Arbeit mit Zahlenwerten verzichten (vgl. Hahn. Kahnt & Maurer 2009, S.9-12).

Die Angabe einer Wahrscheinlichkeit kann allerdings nicht das Eintreten eines Ereignisses vorhersagen. So ist beispielsweise bei viermaligem Ziehen aus 4 Ziffernkarten mit den Ziffern 1 bis 4 nicht sicher, dass eine bestimmte dieser Ziffern auch wirklich einmal dabei ist. Die Wahrscheinlichkeit gibt einzig Auskunft darüber, wie groß die Chance ist, dass das gewünschte Ergebnis eintrifft (vgl. ebd. S.10). Nach dem Gesetz der großen Zahlen nähert sich bei einer sehr großen Anzahl von Versuchen die relative Häufigkeit der günstigen Ereignisses (Verhältnis aus der Anzahl des Eintretens des Ereignisses zur Gesamtzahl der Versuche) der theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeit an (vgl. Eichler 2010, S.9).

Im Interview wird den Kinder ein Spiel vorgestellt, bei dem man jeweils nacheinander zwei Ziffernkarten aus einem Beutel mit vier Karten, auf denen je eine der Ziffern 1 bis 4 steht, ziehen muss. Die beiden Ziffern sollen dann miteinander multipliziert werden. Spieler A gewinnt bei ungeraden Ergebnissen, Spieler B bei geraden. Der Gewinner bekommt jeweils eine Goldmünze, so behält man den Überblick, wer wie oft gewonnen hat. Zusätzlich gibt es eine finale Gewinnregel: Gewinner ist wer zuerst 5 Chips bekommen hat (Entwickelt wurde das Spiel aus den Spielideen von Schwarzkopf (2004, S. 32 – 34) und Spiegel & Selter (2008, S. 57).).

Um herauszufinden, welcher Spieler die besseren Gewinnchancen hat, ermittelt man zunächst die Anzahl aller möglichen Ziffernkartenkombinationen, die gezogen werden können. Es handelt sich hierbei um eine kombinatorische Aufgabe des Typs Variation ohne Wiederholung. Bei diesem Typ sollen *k* von *n* Objekten auf *k* verschiedene Plätze platziert werden ($k, n \in N, k \leq n$). Im beschriebenen Beispiel sind es *k* = 2 Ziffernkarten aus *n* = 4 vorhanden Ziffernkarten, die auf *k* = 2 Plätze platziert werden sollen. Die kombinatorische Formel zur Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten lautet $\frac{n!}{(n-k)!}$, wobei $k, n \in N, k \leq n$ gilt.

Angewandt auf das beschriebene Spiel bedeutet dies, dass man $\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$ mögliche Versuchsausgänge hat. Argumentativ könnte man dies auch so bestimmen: Beim Ziehen der ersten Ziffer gibt es 4 Möglichkeiten. Beim Ziehen der zweiten Ziffer verbleiben dann nur noch je drei Möglichkeiten, an eine der drei Möglichkeiten für den ersten Faktor anzuschließen. Man hat also

$4 \cdot 3 = 12$ mögliche Versuchsausgänge. Dies lässt sich auch gut in einem Baumdiagramm darstellen.

Bei den für Spieler A günstigen Ergebnissen müssen beide Ziffern ungerade sein, denn sonst wäre das Produkt der Ziffern gerade. Um den ersten Faktor zu besetzen, hat man zwei Möglichkeiten (Die Karten mit den Ziffern 1 und 3). Die Ziffer für den zweiten Faktor ist dann die noch Verbleibende. Das heißt für Spieler A gibt es zwei günstige Versuchsausgänge ($3 \cdot 1$ und $1 \cdot 3$).

Um die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten ohne eine Formel bestimmen, kann man weiter auch eine Tabelle nutzen. Hier lassen sich die verschiedenen Möglichkeiten anschaulich und systematisch geordnet ermitteln. Dabei hat man den Vorteil gleich auch alle Ergebnisse zu erhalten und nicht nur deren Anzahl. Die Anzahlen aller möglichen und aller günstigen Versuchsausgänge lassen sich dann einfach abzählen. In der folgenden Tabelle steht links die Ziffer der ersten Karte und oben die der zweiten:

•	**1**	**2**	**3**	**4**
1	/	2	3	4
2	2	/	6	8
3	3	6	/	12
4	4	8	12	/

Die Tabelle zeigt, dass es insgesamt 12 verschiedene Versuchsausgänge geben kann, bei denen aber nur 6 Multiplikationsergebnisse zu unterscheiden sind. Da aber hier die Reihenfolge, in der die Karten gezogen werden wichtig ist, zählen die Tauschaufgaben jeweils auch mit. Die Felder auf der Diagonalen der Tabelle bleiben frei, da die Ziffernkarten nicht zurückgelegt werden dürfen und so keine zwei gleichartigen Karten gezogen werden können. Für den Spieler A sind nur zwei der zwölf Versuchsausgänge günstig 1·3 sowie 3·1), für Spieler B hingegen die restlichen zehn.

Weiter lassen sich alle Versuchsausgänge über systematische Notationsweisen wie Listen finden.

Die Anzahl der für einen Spieler günstigen Ereignisse lässt sich aber auch ohne dass man alle möglichen Ergebnisse konkret aufschreibt und ohne Verwendung einer Formel, bestimmen: Bei der Multiplikation einer beliebigen Zahl mit einer geraden Zahl, ist das Ergebnis gerade. Beim Ziehen der Ziffernkarten ergeben sich also 2 Fälle:

1. Die erste Ziffernkarte ist gerade. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten. Egal welche der drei restlichen Karten nun als zweite Karte gezogen wird, das Ergebnis der Multiplikation bleibt gerade. Man zählt hier also $2 \cdot 3 = 6$ Fälle, die alle günstig für Spieler B sind.
2. Die erste Ziffernkarte ist ungerade. Auch hierfür gibt es zwei Möglichkeiten. Die restlichen zu ziehenden Karten bestehen aus einer verbleibenden ungeraden Ziffer und zwei geraden.
    a. Bei der Kombination der beiden zuerst gezogenen ungeraden Ziffern mit einer der beiden geraden Karten werden die Ergebnisse gerade. Also wiederum $2 \cdot 2 = 4$ günstige Fälle für Spieler B.
    b. Nur wenn die zweite gezogene Karte ungerade ist, wird das Ergebnis ungerade, weshalb es nur $2 \cdot 1 = 2$ günstige Ereignisse für Spieler A gibt.

Insgesamt gibt es also, wie auch schon mit der Tabelle, der Formel oder argumentativ ermittelt, zehn günstige Ereignisse für Spieler B und zwei für Spieler A. Wie die Ausführungen deutlich machen, gibt es vielfältige Möglichkeiten dies zu bestimmen. Es wird deutlich, dass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen für Spieler B fünfmal so groß ist, wie für Spieler A und dass dies auf verschiedenen Wegen entdeckt und begründet werden kann. Nach dem Gesetz der großen Zahlen, sollte es bei häufigem Spielen des Spiels dazu kommen, dass Spieler B auffällig oft gewinnt.

Das vorgestellte Spiel ist zudem leicht abzuwandeln, indem man noch eine weitere Ziffernkarte dazu nimmt oder die Gewinnregel verändert bzw. von den Kindern zu einer fairen Regel verändern lässt. Eine mögliche zweite Gewinnregel könnte sein: Spieler A gewinnt bei Produkten, die kleiner gleich vier sind, Spieler B bei Produkten, die größer als vier sind. Diese Regel klingt zunächst unfair, da für Spieler A nur 4 (1 bis 4) Gewinnzahlen zur Verfügung stehen für Spieler B jedoch 12 (5 bis 16). Vergleicht man jedoch mit den Ausführungen von oben, vor allem mit der Tabelle, erkennt man, dass nicht alle dieser Zahlen mögliche Versuchsausgänge sind und dass sich die Anzahl der möglichen günstigen Versuchsausgänge für beide Spieler auf jeweils 6 beläuft. Somit haben beide Spieler die gleiche Gewinnchance.

Didaktischer Hintergrund

Die inhaltbezogene Kompetenz „Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten“ ist fester Bestandteil des Lehrplans Mathematik für das Bundesland Nordrhein-Westfalen. Zu den dort angegebenen Kompetenzerwartungen für das Ende des vierten Schuljahres gehören folgende beiden Punkte:

„Die Schülerinnen und Schüler

- *bestimmen die Anzahlen verschiedener Möglichkeiten im Rahmen einfacher kombinatorischer Aufgabenstellungen*
- *beschreiben die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen (sicher, wahrscheinlich, unmöglich, immer, häufig, selten, nie)“* (Ministerium für Schule 2008, S.66).

Das oben beschriebene Spiel bietet den Kindern die Möglichkeit, je nach Vorwissen zunächst grundlegende Erfahrungen mit zufälligen Ereignissen zu machen. So können sie entdecken, dass es unmögliche Ereignisse, sichere, aber auch solche, die möglich, aber nicht sicher sind. Auch können sie entdecken, dass bestimmte Ereignisse häufiger auftreten als andere, was dazu motivieren kann, darüber nachzudenken, ob dies Zufall ist oder ob es eine andere Erklärung dafür gibt. Die Kinder werden dazu veranlasst, das Spiel systematischer zu analysieren und über Wahrscheinlichkeiten von bestimmten Ziffernkombinationen nachzudenken (vgl. Eichler 2010, S.8). Um die Wahrscheinlichkeiten der Einzelergebnisse zu ermitteln, müssen die Kinder sich zunächst ein Bild über die verschiedenen möglichen Versuchsausgänge machen und sie in Bezug auf die Gewinnregel bewerten. Hier liegt dann ein Vergleich der Anzahl der möglichen günstigen und insgesamt möglichen Versuchsausgänge nahe. Besonders wird dieses forschende Handeln der Kinder durch die unfair gewählten Gewinnregeln begünstigt, denn es ist auf Grund des Gesetzes der großen Zahlen wahrscheinlich, dass ein Spieler auffällig häufig gewinnen wird. Gerade das kann die Kinder dazu anspornen, das Spiel auf seine Fairness hin zu prüfen.

Es wäre ebenfalls denkbar gewesen, das Spiel mit einem Würfel durchzuführen. Dazu könnte man die Seite mit der 5 und der 6 abkleben und in der erweiterten Aufgabenstellung eine oder beide Abklebungen im Laufe des Interviews entfernen. Diese Variante wurde aus zwei Gründen nicht gewählt. Erstens müsste man sich noch eine Regel überlegen, die den Fall, dass eine abgeklebte Seite gewürfelt wird, abdeckt. Beispielsweise könnte man in diesen Fällen, die Anweisung geben, nochmals zu würfeln. Durch diese Vorgehensweise würde sich jedoch das Einschätzen der Wahrscheinlichkeiten von Wurfergebnissen verkomplizieren, da die Fälle, bei denen man nochmals würfeln muss, von den Kindern sicher mit einbezogen werden würden. Dies ist meines Erachtens für eine erste Annäherung an das Thema Wahrscheinlichkeiten nicht günstig, da zunächst ein grundlegendes Verständnis entstehen soll. Zweitens haben viele Kinder bereits Erfahrungen mit dem Würfel gemacht. Vielfach bestehen bezüglich des Würfels auch Fehlvorstellungen, bspw. dass die 6 seltener als die anderen Ziffern fällt (vgl. Eichler 2010, S. 8). Mit Ziffernkarten zu arbeiten, begünstigt also auch, dass die Kinder unvoreingenommen in das Spiel eintreten können.

Der Zugang über ein Glücksspiel ist auch deshalb vorteilhaft, weil er einen Einstieg über die Erfahrungswelt der Kinder bietet. In ihrem Alltag sind diese ständig mit Situationen, die mit Zufall und Wahrscheinlichkeit zu tun haben, konfrontiert. Beispielhaft seien hier Würfelspiele, Glückspiele auf dem Jahrmarkt oder auch das Lotto-Spiel eines Familienmitglieds genannt. Die Kinder lernen durch die Beschäftigung mit dem vorgestellten Glücksspiel sich kritisch gegenüber solchen zu verhalten und ihre Chancen realistisch einzuschätzen. Eine Beschäftigung mit diesem Thema trägt also auch dazu bei, die Kinder zu mündigen Menschen zu erziehen, die Glückspielen nicht leichtgläubig begegnen (vgl. Schwarzkopf 2004, S. 32). Dies entspricht gleichsam den Forderungen des Lehrplans für den Mathematikunterricht nach *Anwendungs- und Strukturorientierung*. Demnach sollen sowohl die mathematischen Vorerfahrungen in lebensweltlichen Situationen aufgegriffen werden, als auch Einsichten über die Realität mit Hilfe mathematischer Methoden neu gewonnen, erweitert und vertieft werden (vgl. Ministerium für Schule 2008, S.66). Beides wird bei der Beschäftigung mit diesem Spiel berücksichtigt.

Gleichzeitig werden bei einer solchen Auseinandersetzung auch die prozessbezogenen Kompetenzen angesprochen:

Da die Kinder für solche Aufgabentypen noch keine Strategien entwickelt haben, stehen sie vor einem zu lösenden Problem. Um es zu lösen, erschließen sie Zusammenhänge, stellen Vermutungen an, probieren systematisch, reflektieren und prüfen. Bei den veränderten Fragestellungen (neue Ziffer hinzufügen, veränderte Regel oder selbst faire Regeln finden) übertragen, variieren und erfinden sie. Diese Kompetenzen zählen zu der prozessbezogenen Kompetenz *Problemlösen* (vgl. ebd., S.57).

Die prozessbezogene Kompetenz des *Modellierens* wird schon insofern angesprochen, dass das theoretische Konstrukt der Wahrscheinlichkeit an sich ein Modell ist. Beim Zuschreiben einer Wahrscheinlichkeit wird mit entsprechenden Angaben, die in der Grundschule auf der Ebene der verbalen Beschreibung bleiben, ausgedrückt, mit welchem Grad an Wahrscheinlichkeit ein Ereignis eintreten wird. Somit wird eine reale Situation mathematisch modelliert. Die Kinder wenden folglich Mathematik auf eine konkrete Aufgabenstellung aus ihrer Erfahrungswelt (scheinbar unfaires Spiel) an. Dabei erfassen sie die Sachsituation, übertragen sie auf ein mathematisches Modell und wenden mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten an, um anschließend einen Rückschluss auf die Realsituation zu ziehen (vgl. ebd. S.57).

Das *Darstellen/Kommunizieren* wird angesprochen, da die Kinder dazu angehalten werden, ihre Entdeckungen und Überlegungen zu dokumentieren. Dazu können sie verschiedene Darstellungsmittel wie Tabelle, systematische Auflistungen oder auch Skizzen verwenden. Die Kinder sollen die Darstellungsweise zunächst selbst wählen, nur wenn sie keine Ideen haben, sollen sie einen Tipp bekommen.

Auch zum *Argumentieren* werden die Kinder explizit angeregt, da sie begründen sollen, wieso ihre Gewinnregel tatsächlich schlechter ist und das Spiel somit nicht fair. Dazu müssen sie die Beziehungen zwischen den möglichen Ergebnissen und den Gewinnchancen erklären oder Vermutungen dazu anstellen.

Erwartete Vorgehensweisen

Während des Interviews soll das oben dargestellte Spiel zunächst mit den Kindern gespielt werden. Im Zuge des Spielens erwarte ich, dass die Kinder ihren Missmut darüber äußern, dass einer der Spieler viel häufiger gewinnt als der andere bzw. dass manche Produkte viel häufiger auftreten. Dies ist zumindest auf Grund des Gesetzes der großen Zahlen zu erwarten. Hier bietet sich die Gelegenheit, die Kinder dazu anzuregen, darüber nachzudenken, woran das liegt.

Es wird erwartet, dass einige Kinder versuchen, erstmal alle möglichen Ereignisse zu bestimmen. Wie bereits bei der Erläuterung des mathematischen Hintergrunds deutlich geworden ist, gibt es vielfältige Möglichkeiten, sich mit der gegebenen Thematik auseinanderzusetzen. Für die Grundschule schließe ich allerdings aus, dass ein Kind die kombinatorische Formel zur Lösung des Problems nutzen wird. Auch denke ich nicht, dass die Kinder ein Baumdiagramm nutzen werden, da nach Aussage der Lehrperson noch nicht viel über das Thema „Zufall und Wahrscheinlichkeiten" gesprochen wurde.

Zu erwarten sind eher Strategien der Anzahlbestimmung über das Auflisten und Aufzählen. Dabei können die Kinder sowohl unsystematisch, als auch systematisch vorgehen. Ebenso denkbar sind Anzahlbestimmungen mit Hilfe fundamentaler Zählstrategien (vgl. Kira-Internetseite „Kombinatorik"). Beispielsweise könnten die Kinder die Anzahlen der für sie günstigen und ungünstigen Ereignisse bestimmen, ohne die konkreten Ereignisse explizit zu berechnen, wie es bei der Schilderung des mathematischen Hintergrunds dargestellt wurde. Es ist durchaus auch denkbar, dass einige Kinder nicht auf die Idee kommen, sich die möglichen Spielausgänge anzusehen. In diesem Fall kann man die Kinder fragen, was alles passieren kann. Fällt es ihnen schwer alle Möglichkeiten zu finden, könnte man die Maltabelle vorlegen, mit dem Hinweis ein anderes Kind hätte gesagt, damit könne man herausfinden, was alles passieren kann. Es ist ebenfalls möglich, dass die Kinder nicht alle Aufgaben finden. Um auf die unterschiedlichen Gewinnwahrscheinlichkeiten zu schließen, stellt dies aber kein großes Problem dar, denn die Verteilung der günstigen Aufgaben auf die beiden Spieler ist so ungleichmäßig, dass auch wenn ein oder zwei Aufgaben vergessen wurden, dennoch eindeutig ein Spieler mehr günstige Aufgaben hat als der andere. Trotz dessen sollte man die Kinder dazu anregen, die aufgeschriebenen Aufgaben zu sortieren, um zu überprüfen, ob sie alle gefunden haben, um ihre Argumentationsfähigkeiten zu fördern.

Das Hauptaugenmerk in dieser Interviewserie soll allerdings nicht auf die verschiedenen Vorgehensweisen der Kinder bei der Ermittlung aller möglichen Spielausgänge oder deren Anzahlen gerichtet sein, sondern auf ihre Vorstellungen und Denkweisen bzgl. Wahrscheinlichkeiten. Eine Anzahlbestimmung ist jedoch unumgänglich, um Einsichten über die Gewinnwahrscheinlichkeiten zu erlangen, weshalb die möglichen Vorgehensweisen hier dennoch angesprochen sowie weiter Literatur angegeben wurde.

Bzgl. der Vorstellungen zu Wahrscheinlichkeiten ist damit zu rechnen, dass die Kinder aus ihrem Alltag, z.B. aus den Handlungen von Erwachsenen, heraus Fehlvorstellungen zum Thema Zufall und Wahrscheinlichkeiten entwickelt haben. So ist es denkbar, dass verborgene Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Versuchen angenommen werden (Kompensationsargument), also dass ein vorheriges Ereignis beeinflusst, welches Ereignis im Versuch danach wahrscheinlich ist. Ebenso kann die Vorstellung existieren, der Zufall würde „unregelmäßige“ Ereignisse produzieren (beispielsweise beim Lotto: 1-2-3-4-5-6 ist unwahrscheinlicher als 2-6-12-15-26-39). Auch wird oft geringe Wahrscheinlichkeit mit Unmöglichkeit, sowie hohe Wahrscheinlichkeit mit Sicherheit verwechselt. Ebenso denkbar sind Vorstellungen, dass durch bestimmte Glück bringende Handlungen, wie Augenschließen o.ä., den Versuchsausgang beeinflussen können (vgl. Eichler 2010, S. 8). In Situationen, in denen solche Fehlvorstellungen deutlich werden, sollte man situationsabhängig reagieren und mit dem Kind darüber sprechen. Dennoch ist insgesamt zu erwarten, dass die Kinder im Laufe des Interviews herausfinden, dass hier nicht beide Spieler die gleiche Chance zu gewinnen haben, was sie über die ungerechte Verteilung der Gewinnzahlen begründen könnten.

Ziele des Interviews

Das Hauptaugenmerk dieses Interviews soll, wie bereits erwähnt, darauf liegen, welche Vorstellungen die Kinder zur Wahrscheinlichkeit und zum Zufall haben und wie sie erklären, dass ein Spieler häufiger gewinnt als ein anderer. Dies steht natürlich in enger Verbindung damit, wie die Kinder die möglichen Versuchsausgänge bestimmen, jedoch sollen die Argumentationsprozesse und Vorstellungen zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten im Vordergrund stehen. Es lassen sich folgende Forschungsfragen formulieren:

- Wie reagieren die Kinder darauf, dass einer der Spieler wesentlich häufiger gewinnt als der andere?
- Entdecken die Kinder, dass ein Spieler weniger günstige Ergebnisse hat als der andere?
- Stellen die Kinder einen Zusammenhang zwischen den möglichen (günstige und ungünstigen) Ergebnissen und den Gewinnwahrscheinlichkeiten her?
- Welche Vorstellungen haben die Kinder zum Begriff „fair“ und wie beurteilen sie dieses Spiel?
- Welche Vorstellungen bzw. ggf. Fehlvorstellungen haben die Kinder zu den grundlegenden Begriffen zur Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten (sicher, wahrscheinlich, unwahrscheinlich, unmöglich)?
- Wie argumentieren die Kinder?
- Welche Einschätzungen geben die Kinder bzgl. der Vorhersage eines Einzelergebnisses ab?

Allgemeine Hinweise

Nach Auskunft der Lehrerin haben die Kinder sich noch kaum mit dem Thema „Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten“ auseinandergesetzt. Es ist also nicht zu erwarten, dass die Kinder bereits eine Strategie für das Herangehen an solche Problemstellungen haben. Auch kann es sein, dass zunächst geklärt werden muss, was fair überhaupt bedeutet und was ein Glücksspiel ausmacht.

Ebenso muss das gewählte Spiel zunächst von den Kindern verstanden werden. Dazu sollte man den Kindern genug Zeit geben. Gerade wenn die Kinder noch keine Vorstellungen von Wahrscheinlichkeiten haben, sollten sie ausreichend lange das Spiel spielen dürfen, um so erste Erfahrungen zu sammeln, an denen man anknüpfen kann.

Hinführung zum Interview:

Ein möglicher Wortlaut für den Beginn des Interviews könnte wie folgt aussehen:

„Hallo …! Mein Name ist Annabell. Ich studiere an der Universität Dortmund und möchte Lehrerin werden. Ich möchte heute mit dir über ein Spiel sprechen und damit ich mir unser Gespräch später noch einmal ansehen kann, nehme ich es auf Video auf. Du brauchst aber keine Angst haben, ich zeige das Video später niemandem. Es geht auch nicht darum, ob du etwas falsch oder richtig machst, sondern ich möchte mir einfach nur anschauen, wie du über bestimmte Dinge denkst. Deswegen wäre es toll, wenn du immer laut sagen könntest, über was du gerade nachdenkst. Wenn du etwas nicht verstehst, dann sag es mir ebenfalls, das ist gar nicht schlimm. Wenn du bereit bist, können wir anfangen."

Das Interview

1. Einführung des Spiels „Ziffernkarten multiplizieren"

Aufgabe	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
Ich habe heute ein Spiel mitgebracht. Zu dem Spiel gehören diese 4 Karten, auf denen die Zahlen 1 bis 4 stehen. Die kommen nun in diesen Beutel. Beim Spielen muss man immer nacheinander zwei Ziffernkarten aus diesem Beutel ziehen und auf diese Felder (vgl. Anlage Spielfeld) legen. Die beiden Ziffern muss man dann multiplizieren. Wenn das Ergebnis ungerade ist, bekommst du eine Goldmünze und wenn das Ergebnis gerade ist, bekomme ich eine. Wer zuerst fünf Goldmünzen hat, ist der Gewinner. Hast du die Regeln verstanden?	Zunächst soll das Kind die Spielregeln erfahren. Ggf. müssen Verständnisprobleme geklärt werden. In dieser Einstiegsphase sollen die Kinder durch das Spielen die Möglichkeit bekommen, über die Gewinnregeln nachzudenken. Sie werden hier aber noch nicht mit gezielten Fragestellungen zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten konfrontiert. Nach einer Weile sollte man die Gewinnregeln vertauschen, so dass sowohl das Kind als auch der Interviewer jeweils eine Runde mit jeder der beiden Gewinnregeln gespielt hat. Es ist möglich, dass ein Kind direkt erkennt, dass es sich um unfaire Gewinnregeln handelt. In diesem Fall sollte man das Kind dazu auffordern, dies explizit zu begründen (vgl. nachfolgende Fragestellung).

2. Nachdenken über Gewinnwahrscheinlichkeiten anregen

Aufgabe	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
Während des Spiels sollten erste Beschwerden der Kinder auftreten. Auf diese stellt man den Kindern nun die Frage: „Ist das Zufall, dass ich meistens gewinne und du verlierst?“	Die Kinder sollen dazu angeregt werden, zu überlegen, ob das wirklich Zufall ist. Hier bleibt abzuwarten, welche Argumente die Kinder zur Begründung aufführen. Hat ein Kind überhaupt keine Idee, wieso das so sein könnte, kann man folgende Impulse geben (je nach Einschätzung der Situation einen auswählen): • Bei welchen Ergebnissen würdest du denn gewinnen? Können die bei einer der gezogenen Aufgabe herauskommen? • Welche Ergebnisse können denn überhaupt herauskommen? Fällt dir etwas auf? (evtl.: Bei welchen gewinne ich und bei welchen gewinnst du? Hat ein Kind begonnen mögliche Ergebnisse zu suchen, geht dabei jedoch unsystematisch und ohne Struktur vor, so kann man folgende Zwischenfrage stellen: • Kannst du die verschiedenen Möglichkeiten ordnen? Wenn ein Kind meint, alle möglichen Ziffernkombinationen gefunden zu haben, sollte man es auffordern zu begründen, wieso es alle sind. Kindern, die hier große Probleme haben, könnte man die Maltabelle als Hilfestellung, um alle Ergebnisse zu finden, anbieten. Auch ist es denkbar, dass für Kinder die kommutative Vertauschung einer Aufgabe als gleich angesehen wird. Hier sollte man nochmals nachhacken: • Ist das egal, ob man zuerst die eine oder die andere Zahl zieht? • Ist das die gleiche Möglichkeit oder sind das verschiedene Möglichkeiten zu ziehen? Sind alle Möglichkeiten gefunden, ist es wichtig den Bezug zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten zu thematisieren. Dazu können folgende Fragen dienen: • Was bedeutet das, dass du nur eine Möglichkeit hast? • Wie viele Möglichkeiten habe ich denn? • Hat das etwas damit zu tun, dass ich öfter gewonnen habe? Es ist möglich, dass der Bezug zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten nicht deutlich wird und den Kindern der Sinn des Findens aller Möglichkeiten verborgen bleibt. Dazu sollen ggf. im Interview Erfahrungen gesammelt werden. Werden von den Kinder Begriffe wie *wahrscheinlich*, *sicher*, *unwahrscheinlich* oder *unmöglich* gebraucht, sollte man sie unbedingt auffordern zu erläutern, was sie darunter verstehen, da sie im Alltag oft mit abweichenden Bedeutungen benutzt werden. Z.B. bedeutet „etwas wird sicher passieren“ im Alltag oft nicht, dass es auf jeden Fall passiert, sondern nur mit einer recht hohen Wahrscheinlichkeit. Es ist also wichtig zu klären, welche Vorstellungen die Kinder haben, damit im Nachhinein verständlicher ist, was sie mit ihren Äußerungen meinten.

Was passiert, wenn man das Spiel ganz oft hintereinander spielt? Kann es auch passieren, dass der Spieler mit den ungeraden Zahlen gewinnt?	Diese Fragen dienen dazu, herauszufinden, was die Kinder über die Vorhersagbarkeit eines Einzelergebnisses denken. Dieser Aspekt sollte ebenfalls aufgegriffen werden, wenn vorkommende Spielergebnisse nicht zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten passen, bspw.: • Wieso habe ich denn nun trotz der fairen Regeln öfter gewonnen als du? Es ist in diesem Zusammenhang wichtig, situationsabhängig und flexibel auf Äußerungen von Kindern und die gegebene Spielsituation zu reagieren und diese aufzugreifen. So müssen die Fragen auf die vorliegenden Spielergebnisse angepasst werden.
Weißt du was fair bedeutet?/ Was bedeutet denn fair?	Je nachdem, ob das Kind den Begriff der Fairness von selbst benutzt (zweite Fragestellung) oder nicht, kann man eine der beiden vorgeschlagenen Formulierungen nutzen. Damit soll geklärt werden, welche Vorstellungen das Kind zum Begriff „Fairness“ hat. Auch hier ist es möglich, dass die Begriffe „wahrscheinlich“ o.ä. fallen. Damit sollte man wie bereits oben beschrieben, umgehen.
Ist das Spiel fair?	Diese Frage sollte abschließend noch einmal gestellt werden, je nachdem ob sie vom Kind im Zuge der vorangehenden Betrachtungen bereits beantwortet wurde. Die Kinder sollen hier ihre Entdeckungen zu einander in Bezug setzen. Hat der Kind Probleme mit dem Begriff fair, könnte man alternativ folgende Frage stellen: • Für welche der beiden Gewinnregeln würdest du dich beim nächsten Mal entscheiden, dass du bei geraden oder bei ungeraden Ergebnissen gewinnst? Warum?

3. Weiterführende Aufgabenstellung

Die hier angegebenen Aufgabenstellungen müssen nicht alle gestellt werden. Je nach Ablauf des Interviews (vgl. vorangehende Anmerkungen) kann man eine oder zwei der Fragestellungen auswählen.

Aufgabe	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
Kannst du das Spiel so verändern, dass es fair ist?	Diese Frage dient dazu herauszufinden, ob das Kind verstanden hat, was ein faires Spiel ausmacht. Bei der Wahl der neuen Regeln, kann das Kind völlig frei agieren, wichtig ist nur, dass es erklärt, wieso seine Regeln gerecht sind. Dabei kann man auch nochmals Bezug auf die vorangegangenen Gewinnregeln nehmen.
Was passiert denn, wenn ich noch eine Karte mit der 5 in den Beutel stecke? Ist das Spiel jetzt fair?	Durch das Hinzufügen einer weiteren Ziffer ändert sich nicht viel an den Gewinnchancen der einzelnen Spieler. Es kommen für Spieler B noch weitere Gewinnzahlen (5 und 15) hinzu, jedoch ist dies auch für Spieler A der Fall. Die Beurteilung dieser Variation des Spiels lässt sich also durch Bezugnahme auf die erste Variante herleiten. Hier kann man erkennen, ob das Kind das Prinzip der Gewinnwahrscheinlichkeit verstanden hat. Diese Fragestellung kann auch als Impuls genutzt werden, wenn das Kind keine Idee für eine faire Spielversion hat.

Wie ist, wenn man eine andere Gewinnregeln hat? Du gewinnst bei allen Ergebnissen, die kleiner oder gleich 4 sind und ich bei allen Ergebnissen, die größer sind als 4. Glaubst du, dass das Spiel so fair ist?	Falls das Kind keine eigene Regel findet, kann dies als Lösung eines anderen Kindes angeboten werden. Das Kind kann dann prüfen, ob diese Variante fair ist. Wenn das Kind eine eigene Version gefunden hat, die sich von dieser unterscheidet, ist es aber dennoch möglich diese als zusätzliche Möglichkeit zu präsentieren, um weitere Einschätzungen des Kindes zu hören. Zu Beurteilung dieser Version: Im ersten Moment ist es naheliegend, eine unfaire Spielregel anzunehmen, denn es scheint, als ob für Spieler A viel weniger Ergebnisse günstig sind als für Spieler B. In der Maltabelle wird allerdings deutlich, dass für beide eine gleiche Anzahl an günstigen Ergebnissen existiert. Als Impulse und Hilfestellungen können hier die gleichen Fragestellungen wie in der Grundversion des Spiels gestellt werden.

Dokumentation des Interviews

Zur Dokumentation des Interviews wird eine Videokamera benutzt. So können die Gespräche und Handlungen der Kinder auch nach dem Interview noch im Detail analysiert werden. Auch werden die Kinder dazu angehalten ihre Ergebnisse und Überlegungen zu notieren.

Bei der Analyse der Interviews sollen die Dokumente und Videos gesichtet und miteinander verglichen werden. Dabei soll ein besonderes Augenmerk auf die Argumentationsprozesse und Vorstellungen der Kinder bezüglich Gewinnwahrscheinlichkeiten gelegt werden. Durch den Vergleich werden besonders die individuellen Unterschiede im Denken der Kinder sichtbar. Aus ihnen kann man wertvolle Informationen für die Gestaltung der nachfolgenden Interviewserie und der Unterrichtseinheit gewinnen. So kann man sich anhand der Analyse neue Impulse oder Hilfestellungen überlegen.

Literatur

Eichler, K.-P. (2010): Wahrscheinlich kein Zufall – Betrachtungen rund um Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit. In: *Praxis Grundschule.* 33. Jg., H. 3, S. 7-13.

Hahn, H., Kahnt, J. & Maurer, F. (2009): Wahrscheinlich ist „… es kann klappen, muss aber nicht…“ – Erfahrungen mit Wahrscheinlichkeitsaufgaben in der Grundschule. In: *Sache-Wort-Zahl*. 37. Jg., H.102, S. 9-16.

Kira-Internetseite zum Thema Kombinatorik. http://www.kira.tu-dortmund.de/front_content.php?idcat=202&lang=8 (Abruf: 04.10.2011).

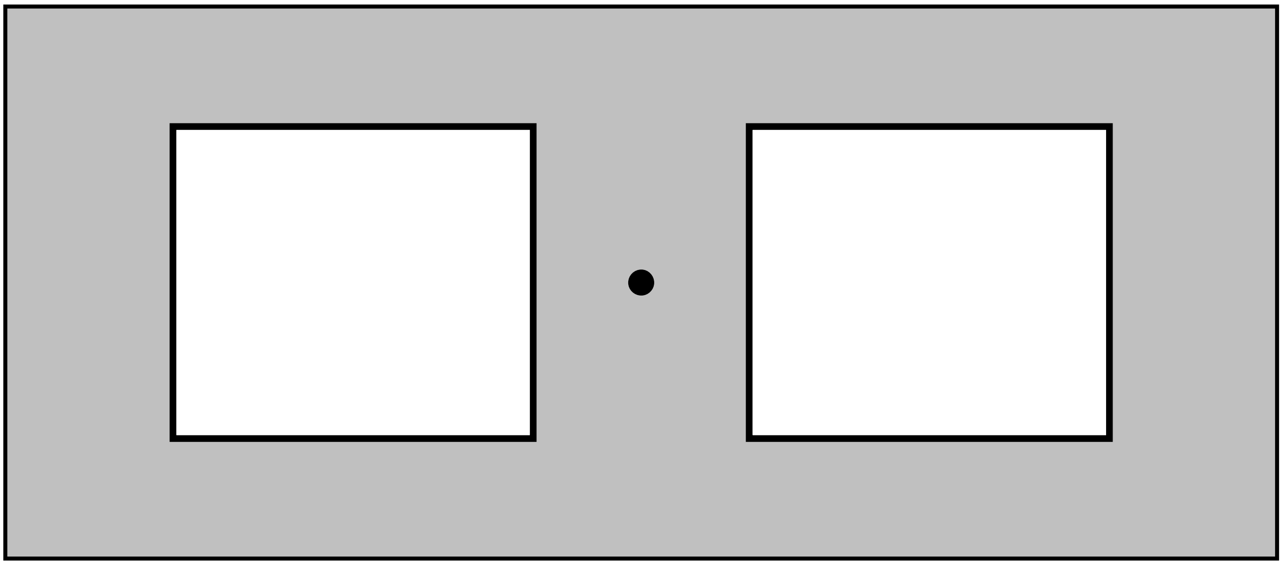
Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (2008): Lehrplan Mathematik. In: *Richtlinien und Lehrpläne die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*. Frechen: Ritterbach, S.53-68.

Schwarzkopf, R. (2004): Wer gewinnt? - Dem Zufall auf der Spur. In: *Die Grundschulzeitschrift*. 18. Jg., H. 172, S. 32-36.

Anlagen

- Ziffernkarten
- Spielfeld
- Strukturierungshilfe „Maltabelle“

1	2	3
4	5	



•	1	2	3	4
1	X			
2		X		
3			X	
4				X