

Lernumgebung *figurierte Zahlenfolgen*

Jahrgangsstufe: 4. - 5. Schuljahr
 Zeitlicher Umfang: 45 Minuten
 Material: Arbeitsblätter (s. Anhang)
 Stifte (Fineliner & Bleistift), Geodreieck,
 kariertes Papier, kleine Holzwürfel

Hintergrundinformationen

Mathematischer Hintergrund

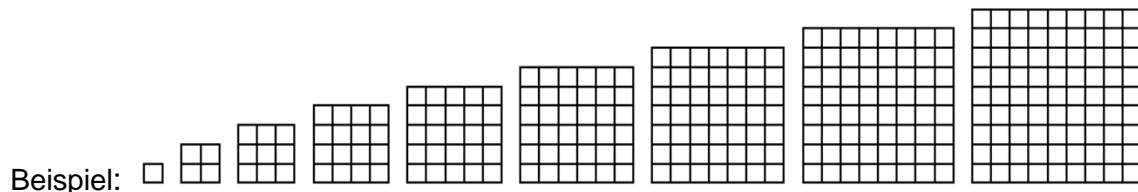
Das Aufgabenformat

Das Entdecken, Erforschen und Erklären von Mustern sind zentrale Tätigkeiten in der Mathematik. Lernumgebungen, wie die „*figurierten Zahlenfolgen*“, ermöglichen Kindern eine Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten auf ihrem individuellen Niveau. Die Lernumgebung bietet zahlreiche Anlässe zum Ausprobieren und Erforschen sowie zum Aufstellen, Überprüfen und schließlich auch zum Begründen von Thesen über Zusammenhänge und Muster.

Figurierte Zahlenfolgen, (auch „*Folgen geometrischer Zahlen*“) kann man auf unterschiedliche Arten darstellen.: **Figuriert** durch geometrische Formenmuster und **symbolisch** durch die jeweils zugehörigen Zahlenfolgen.

(i) *Figuriert*: Formenmuster

Die Zahlenfolge entwickelt sich aus einer Folge wachsender, **ähnlicher** Figuren.

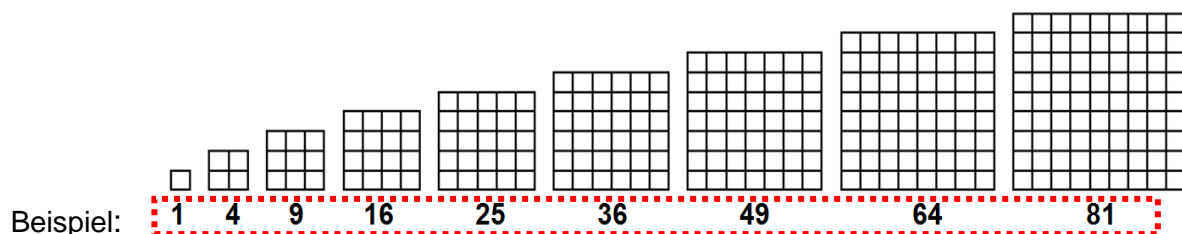


Alle Figuren der Folge haben gemeinsame Merkmale, die sie verbinden (s. Bildungsgesetze).

Um die Folge fortzusetzen, müssen diese Merkmale erkannt und auf weitere Figuren übertragen werden.

(ii) *Symbolisch*: zugehörige Zahlenfolgen

Diese abstraktere Darstellung der Zahlenfolge ergibt sich durch die Bestimmung der Kästchenanzahl der jeweiligen Figur der Folge.



Die symbolische Zahlenfolge wird am besten deutlich, wenn man die Anzahl der Kästchen, abhängig von der Position der entsprechenden Figur innerhalb der Folge, ordnet. Hierzu kann man sie zum Beispiel in eine geeignete Tabelle eintragen. Beispiel für Quadratzahlen:

Position der Figur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Anzahl der Kästchen	1	4	9	16	...						

Anstatt die Anzahl der Kästchen zu ermitteln kann man die symbolische Darstellung der Folge auch enaktiv, also handelnd, ermitteln, indem man die Figuren der Folge mit Würfeln nachbaut und jeweils die pro Figur benötigte Würfelanzahl ermittelt. Es sind also Zugänge auf unterschiedlichen Leistungsniveaus und unterschiedlichen Abstraktionsgraden möglich.

Bildungsgesetze:

Bei der Betrachtung der sich jeweils ergebenden Zahlenfolge kann man eine Reihe von Entdeckungen machen und so Einblicke in die strukturellen Zusammenhänge und die, der Folge zugrunde liegenden, mathematischen Muster gewinnen. Die gemeinsamen Merkmale, die die einzelnen Figuren einer figurierten Zahlenfolge verbinden, resultieren in folgenspezifischen **Bildungsgesetzen**. Diese können z. B. dabei helfen, die Anzahl der Kästchen für eine Figur an einer **beliebigen** Position der Folge zu berechnen.

Hier ein kurzer Überblick über die figurierten Zahlenfolgen, die in diesem Interviewleitfaden behandelt werden:

	<i>Explizite Darstellung</i>		<i>Rekursive Darstellung</i>	<i>Figurierte Folge</i>
Dreieckszahlen/ „Treppen“	$D_n = 1/2 n (n+1)$	$D_n = 1+2+3+\dots+n$	$D_n = D_{n-1} + n$	
Quadratzahlen	$Q_n = n^2$	$Q_n = 1+3+5+\dots+(2n-1)$	$Q_n = Q_{(n-1)} + (2n-1)$	
T-Form	$T_n = 1+3n$	$T_n = 1+3+3+\dots+3$ (n mal 3 addieren)	$T_n = T_{n-1} + 3$	

Fragestellungen für mögliche Entdeckungen bei figurierten Zahlenfolgen:

a) *Beziehung: Position – Kästchenanzahl*¹

Wie kann ich die Anzahl der Kästchen der n-ten Figur bestimmen,

- (i) ...wenn die Kästchenanzahl der Vorgängerfigur bekannt ist? (rekursiv)
- (ii) ...ohne die Kästchenanzahl der Vorgängerfigur zu kennen oder vorher zu berechnen? (explizit)

b) *Bildung der Zahlenfolge (rekursive Betrachtung)*

Regelmäßigkeiten in der Zahlenfolge:

Wie entwickeln sich die Unterschiede zwischen zwei benachbarten Folgezahlen im Verlauf der Folge/ Beschreibung des Zuwachses der Kästchenanzahlen von Figur zu Figur.

Für die im Interview untersuchten geometrischen Zahlenfolgen vergleichen Sie dazu die detaillierte Vorstellung der Aufgaben auf S. 7ff in diesem Interviewleitfaden.

Zusätzliche Information:

- Eine weitere Besonderheit der Treppen: Zwei benachbarte Folgezahlen bilden in ihrer Summe je eine Quadratzahl: die (n-1)-te Folgezahl addiert zur n-ten Folgezahl ergibt die n-te Quadratzahl (n^2). Formal: $D_n + D_{n-1} = Q_n$

Dies wird anschaulich, wenn man die n-te Treppe zu einem Quadrat ergänzt (s. rechts).

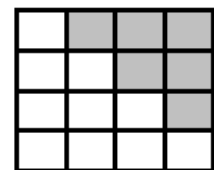


Abb.: (n=4)

n-te Treppe + (n-1)-te Treppe = n^2

¹ vgl. Hengartner/Hirt/Wälti 2006, S. 118

Didaktischer Hintergrund

Die Lernumgebung figurierte Zahlenfolgen

Bei der Auseinandersetzung mit Folgezahlen werden prozessbezogene Kompetenzen gefördert. Dies ist sehr wichtig. Sind diese gut ausgebildet, sind die Voraussetzungen gut, dass den mathematischen Tätigkeiten des Kindes inhaltliches Verständnis zu Grunde liegt.

Dem stupiden „Runterrechnen“, also dem Anwenden nicht verstandener, daher sinnentleerer Algorithmen und der Auffassung von „Mathematik als Regelwerk“² kann schon in der Grundschule durch geeigneten Unterricht entgegengewirkt werden.

Durch die Beschäftigung mit komplexen Aufgabenformaten bzw. Lernumgebungen gewinnt nicht nur der Lehrer, weil hier eine innere Differenzierung besonders gut gelingen kann³, sondern auch die Schüler. Zahlenfolgen sind ein Beispiel für solche komplexen Aufgabenformate.

Hier können Kinder auf ihrem individuellen Leistungsniveau viele Entdeckungen machen. Während leistungsschwächeren Kindern die Besonderheiten vielleicht lediglich auffallen, können leistungsstärkere diese Besonderheiten vielleicht sogar schon begründen⁴.

Es lassen sich durch geringfügige Variationen der Figuren leicht eine Vielzahl von weiteren analogen Figurenfolgen, auf jeweils unterschiedlichen Anforderungsniveaus, finden, weswegen sich diese Lernumgebung besonders gut zur natürlichen Differenzierung eignet. Es ist auch vorstellbar, dass die Lernenden selber Figurenfolgen erstellen, die dann von ihren Mitschülern untersucht werden können. Damit auch die jeweiligen „Erfinder“ hierbei möglichst viel mathematisch profitieren, können sie Musterlösungen erstellen, die für die anderen Kinder dann zur Kontrolle dienen.

Die Darstellung der Lösungswege, zum Beispiel durch Präsentation vor der Klasse an der Tafel oder durch eine Diskussion im Stuhlkreis, schult außerdem die kommunikativen, sowie die darstellerischen Kompetenzen der Schüler. Die Einführung und das Anwenden von Fachsprache lassen sich im Rahmen dieses Aufgabenformates gut in den Unterricht integrieren.

Lehrplanbezug

(i) Inhaltsbezogene Kompetenzen

Lehrplan NRW⁵	Bezug zur Lernumgebung figurierte Zahlenfolgen
<i>...Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 4 Die Schülerinnen und Schüler...</i>	
Bereich: Zahlen und Operationen	
<i>Schwerpunkt: Zahlvorstellungen</i>	
<ul style="list-style-type: none"> •Nutzen Strukturen in Zahldarstellungen zur Anzahlerfassung im erweiterten Zahlenraum 	<ul style="list-style-type: none"> •Eventuell Aufteilen der gezeichneten Figuren in kleinere Einheiten, um die Kästchenanzahl besser bestimmen zu können •(z. B. bei Quadratzahlen: Ausnutzung der quadratischen Form zur expliziten Berechnung der n-ten Folgezahl (n^2))
<ul style="list-style-type: none"> •Entdecken Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen und in komplexen Zahlenfolgen und beschreiben diese unter Verwendung von Fachbegriffen (z. B. <i>ist Vorgänger/Nachfolger von, ist Nachbarzehner/ Nachbarhunderter von, ist die Hälfte/das Doppelte von, ist Vielfaches/Teiler von</i>) 	<ul style="list-style-type: none"> • Aufstellen von Vermutungen über Regelmäßigkeiten • Suchen und Finden von Bildungsgesetzen • Begründen dieser Vermutungen und Gesetze • Erläuterung des Vorgehens
<i>Schwerpunkt: Operationsvorstellungen</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • Wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen von Operationen (mit Material, bildlich, symbolisch und sprachlich) hin und her 	<ul style="list-style-type: none"> •Nachbau der Figuren mit Holzwürfeln •Aufzeichnen der Figuren •Notieren der sich ergebenden Zahlenfolge

² Selter 2004, S. 1

³ vgl. Hengartner u.a. 2006, S. 11

⁴ vgl. Franke 2003, S. 78

⁵ Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW 2008, S. 61ff



Bereich: Raum und Form	
Schwerpunkt: Ebene Figuren	
<ul style="list-style-type: none"> • Bestimmen und vergleichen den Flächeninhalt ebener Figuren und deren Umfang (z. B. <i>durch Auslegen mit Einheitsquadraten oder Zerlegen in Teilstücke</i>) 	<ul style="list-style-type: none"> • Bestimmen der Kästchenanzahl einer Figur der Folge
<ul style="list-style-type: none"> • Stellen auf Gitterpapier ähnliche ebene Figuren durch maßstäbliches Vergrößern und Verkleinern her 	<ul style="list-style-type: none"> • Bestimmung und Zeichnung der folgenden Figuren einer zum Teil vorgegebenen Folge: →Wie sehen wohl die nächsten Figuren aus? →Wie geht es weiter? Male auf!
Schwerpunkt: Zeichnen	
<ul style="list-style-type: none"> • [...] nutzen Gitter- und Punkteraster zum Zeichnen von ebenen Figuren und Würfelgebäuden 	<ul style="list-style-type: none"> • Bestimmung und Zeichnung der folgenden Figuren einer zum Teil vorgegebenen Folge

(ii) Prozessbezogene Kompetenzen

Lehrplan NRW⁶	Bezug zur Lernumgebung figurierte Zahlenfolgen
Problemlösen/Kreativ sein	
<ul style="list-style-type: none"> • Probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (lösen) 	Beim Suchen nach Regelmäßigkeiten / Bildungsgesetzen der Zahlenfolgen.
<ul style="list-style-type: none"> • Überprüfen Ergebnisse auf ihre Angemessenheit, finden und korrigieren Fehler, vergleichen und bewerten verschiedene Lösungswege (reflektieren und überprüfen) 	Wenn Zahlen der Zahlenfolgen gegen vermutete Regeln verstoßen, kann das Kind die entsprechende Zahl nochmals überprüfen und gegebenenfalls korrigieren. Vergleichen gefundener Lösungswege (Auszählen, rekursiv, explizit) auf Effizienz, Rechenaufwand, Fehleranfälligkeit, ...
<ul style="list-style-type: none"> • Übertragen Vorgehensweisen auf ähnliche Sachverhalte (übertragen) 	Bearbeitung der Aufgaben zu einer Zahlenfolge ist beeinflusst durch die Bearbeitung der vorangegangenen Zahlenfolgen. Vielleicht werden erfolgreiche Strategien wieder angewandt.
Argumentieren	
<ul style="list-style-type: none"> • Stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten an (vermuten) 	Aufstellen von Thesen über Bildungsgesetze einer Zahlenfolge vor Überprüfung an Beispielen.
<ul style="list-style-type: none"> • Testen Vermutungen anhand von Beispielen und hinterfragen, ob ihre Vermutungen, Lösungen, Aussagen, etc. zutreffend sind (überprüfen) 	Stimmt mein Bildungsgesetz?
<ul style="list-style-type: none"> • Bestätigen oder widerlegen ihre Vermutungen anhand von Beispielen und entwickeln – ausgehend von Beispielen – ansatzweise allgemeine Überlegungen oder vollziehen diese nach (folgern) 	Prüfen des Bildungsgesetzes an Beispielen Gegebenenfalls: Anpassen des Bildungsgesetzes Evtl. Verallgemeinerung des gefundenen Bildungsgesetzes
<ul style="list-style-type: none"> • Erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (begründen) 	Erklärung, warum gefundenes Bildungsgesetz stimmt (Beispielgebunden oder allgemein)
Darstellen, Kommunizieren	
<ul style="list-style-type: none"> • Halten ihre Arbeitsergebnisse, Vorgehensweisen und Lernerfahrungen fest (z. B. <i>im Lerntagebuch</i>) (dokumentieren) 	Notieren ihre Rechnungen, Lösungswege und Ergebnisse, sowie ihre Beobachtungen und Begründungen auf dem Arbeitsblatt
<ul style="list-style-type: none"> • Verwenden bei der Darstellung mathematischer Sachverhalte geeignete Fachbegriffe, mathematische Zeichen und Konventionen (Fachsprache verwenden) 	Eventuell beim Erklären ihres Vorgehens (mündlich oder schriftlich) z.B. Vorgänger, Nachfolger, Fläche, Kante, Anzahl, ...
<ul style="list-style-type: none"> • Übertragen eine Darstellung in eine andere (zwischen Darstellungen wechseln) 	Die Folgezahlen können im Verlaufe der Bearbeitung je nach Bedarf vom Kind sowohl <i>enaktiv</i> (Nachbauen der Gebilde mit Würfeln) als auch <i>ikonisch</i> (Aufzeichnen der Gebilde auf Papier) oder <i>symbolisch</i> (als reine Zahlenfolge) dargestellt werden.

⁶ MSW NRW 2008, S. 59f.

Das Interview

Allgemeine Hinweise

Die Thematisierung von figurierten Zahlenfolgen ist auf ganz unterschiedlichen Niveaus möglich. Damit allen Kindern ein Zugang ermöglicht wird, ist es sinnvoll, zum Einstieg in das Thema die behandelten Zahlenfolgen, wie im Interview, anschaulich darzustellen (z.B. durch eine Folge von wachsenden Figuren)⁷.

Da die explizite Berechnung von Zahlen der Zahlenfolge ein fundiertes Grundwissen und eine sichere Anwendung aller vier Grundrechenoperationen erfordert, erscheint die Behandlung des Themas in der hier vorgestellten Weise ab der 4. Klasse sinnvoll. Eine Steigerung der Schwierigkeit ist ohne Probleme möglich, sodass auch höhere Jahrgangsstufen an Zahlenfolgen forschen können. Das Thema kann im Sinne des spiralförmigen Unterrichts in höheren Klassenstufen wieder aufgegriffen und vertieft werden, aber auch in niedrigeren Klassenstufen, auf einem entsprechend geringeren Niveau behandelt werden.

Hinführung zum Interview:

Ich begrüße das Kind, stelle mich vor und erkläre die Interviewsituation:

„Ich habe einige Aufgaben mitgebracht, die du gleich lösen wirst. Ich werde dir die Aufgaben erklären und wenn du eine Frage hast, kannst du mich jeder Zeit fragen. Ich werde dir auch manchmal Fragen stellen, dann musst du nicht denken, dass du etwas falsch gemacht hast. Es interessiert mich nur sehr, wie du denkst, und wie du die Aufgabe löst. Es ist nicht schlimm, wenn du etwas nicht kannst, denn das hier ist kein Test und es gibt auch keine Note.“

Ziele des Interviews – Beobachtungsschwerpunkte

- Wie erlangen (und erklären) die Kinder ihre Lösungsstrategien?
- Welche unterschiedlichen Lösungsstrategien können beobachtet werden?
- Ist die allgemein favorisierte Strategie abhängig von der untersuchten Folge?
- Was sind typische Schwierigkeiten/Fehler?

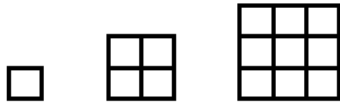
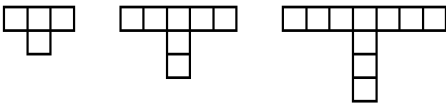
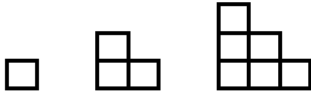
Das Interview – detaillierte Vorstellung der Aufgaben

1.1 Einführung des Aufgabenformates: Benennung der figurierten Zahlenfolgen

Aufgabe	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
a) Quadrate & Treppen Wie könnte die Folge heißen? Denk dir einen Namen aus: (entsprechendes Bild der Folge)	Damit der Einstieg ins Interview für alle Schüler möglich ist, wird die Anforderungsschwelle zu Beginn bewusst niedrig gewählt. Die Kinder dürfen sich irgendeinen einen Namen für die Folge ausdenken.
b) T-Form: Name ist vorgegeben, um Kinder denen kein Name einfällt zu inspirieren	

⁷ vgl. Hengartner u. a. 2006, S. 128

1.2 Einführung des Aufgabenformates: Folgen enaktiv oder ikonisch fortsetzen

Aufgabe	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
<p>b) Quadrate & Treppen</p> <ul style="list-style-type: none"> Hier siehst du die ersten drei Figuren einer Folge: (entsprechendes Bild) Male die nächsten drei Figuren. Woher wusstest du das? <p>b) T-Form:</p> <p>Hier siehst du die 1. und die 5. Figur der T-Formen. (entsprechende Bilder) Wie sieht wohl die 3. Figur aus? Wie die 7. Figur? Male auf!</p> <p>(Es liegen kariertes Papier und Holzwürfel bereit. Die Kinder können sich nach Bedarf bedienen)</p>	<p>Der Entwicklung der Folgeglieder liegt immer die gleiche Idee zugrunde.</p>
<p>Quadrate</p> 	<p>Bei den Quadraten ist sowohl die Grundfläche als auch die Höhe der folgenden Figur jeweils ein Kästchen größer. Alle Figuren sind Quadrate.</p>
<p>T-Form</p> 	<p>Bei den T-Formen wird jeder der drei „Arme“ des Ts pro Schritt um ein Kästchen verlängert.</p>
<p>Treppen</p> 	<p>Bei den Treppen ist sowohl die Grundfläche als auch die Höhe der folgenden Figur jeweils um ein Kästchen größer. Die Treppe erhält pro Schritt eine Stufe mehr und wird entsprechend höher.</p>

2.1 Zahlenfolgen symbolisch fortsetzen und Regelmäßigkeiten entdecken: Mit Hilfe einer geeigneten Tabelle

Aufgabe	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen												
<p>Wie viele Kästchen haben die Figuren?</p> <p>Trage in die Tabelle ein.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Nummer</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>...</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>Anzahl</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Welche Regelmäßigkeiten fallen dir auf? Beschreibe deine Beobachtungen!⁸</p>	Nummer	1	2	3	4	...	Anzahl						<p>Hier bearbeiten die Kinder die Zahlenfolgen der Quadrate, der T-Form und der Treppen. Grundlage für diese Aufgabe sind die bearbeiteten Arbeitsblätter aus Aufgabe 1.</p>
Nummer	1	2	3	4	...								
Anzahl													
<p>Quadrate</p>	<p>Die Kästchenanzahlen bilden die Reihe der Quadratzahlen. Der Zuwachs an Kästchen nimmt jeweils um zwei zu:</p> $1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+5} 9 \xrightarrow{+7} 16 \xrightarrow{+9} \dots$ <p>Er bildet die Reihe der ungeraden Zahlen ab einschließlich drei.</p>												
<p>T-Form</p>	<p>Die Würfelanzahl nimmt immer um drei zu, der Zuwachs ist also konstant bei +3:</p> $4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+3} 10 \xrightarrow{+3} 13 \xrightarrow{+3} \dots$												
<p>Treppen</p> <p>Tabelle hier nur bis zur 5. Folgezahl vorgegeben, damit das Bildungsgesetz der Zahlenfolge in Aufgabe 2.2 nochmals reflektiert werden kann.</p>	<p>Die Würfelanzahlen bilden die Reihe der Dreieckszahlen. Der Zuwachs an Würfeln nimmt jeweils um eins zu:</p> $1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} \dots$ <p>Er bildet die Reihe aller natürlichen Zahlen ab einschließlich zwei.</p>												

2.2 Zahlenfolgen symbolisch fortsetzen und Regelmäßigkeiten entdecken: Gehören die Zahlen zur Folge?

Aufgabe	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
<p>Kommen die Zahlen 25 und 36 in dieser Zahlenfolge vor? Begründe!</p>	<p>Die Kinder müssen die Zahlenfolge hier selbstständig fortsetzen, dafür müssen sie das rekursive (oder explizite Bildungsgesetz) der Zahlenfolge erkannt haben (vgl. rekursiv: Aufgabe 2.1, explizit: Aufgabe 3)</p>

⁸ vgl. Hengartner u. a. 2006, S. 119

3. Weiterführende Aufgabenstellung: Bestimmung der 20. Zahl der Folge⁹

Aufgabe	Aufgabenspezifische Hintergrundinformationen
Wie viele Kästchen hat wohl die 20. Figur? • Hier ist Platz für deine Überlegungen • Erklärung:	Zur rekursiven Rechnung s. o. Hinweise zur expliziten Berechnung:
Quadrate	Die n-te Figur besteht aus n^2 Kästchen
T-Form	Die n-te Figur besteht aus $1+3n$ Kästchen.
Treppen	Das Gebäude an der n-ten Position besteht aus $(n+1) \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot (n^2+n) = \frac{n^2+n}{2}$ Kästchen.

Bearbeitung

Erwartete Strategien:

Aufgabe 1.1: Folgen benennen

- Benennung der Folge oder Aufschieben der Benennung auf einen späteren Zeitpunkt

Aufgabe 1.2: Folgen enaktiv oder ikonisch fortsetzen

- Nutzung der bereitgestellten Würfel zum Nachbauen und anschließenden Abzeichnen der Figuren
- Orientierung an Rechenkästchen
- Nutzung des Geodreiecks
- Finden der folgenden Figuren durch probierendes Zeichnen

Aufgabe 2.1 & Zahlenfolgen symbolisch fortsetzen &

Aufgabe 2.2: Regelmäßigkeiten in den Zahlenfolgen entdecken

- Abzählen der verwendeten Holzwürfel pro Figur
- Auszählen der Kästchen der gezeichneten Figuren
- Tabelle zuerst abzählend ausfüllen, dann Erkennen einer Regelmäßigkeit in der Zahlenfolge, die zum Ermitteln weiterer Folgezahlen genutzt wird
 - (i) Regelmäßigkeiten in den Unterschieden/Zuwächsen der Folgezahlen erkennen → rekursive Berechnung der nächsten Zahlen (durch fortgesetzte Addition)
 - (ii) Erkennen des Bildungsgesetzes ausgehend von der Figur als Ganzes → explizite Berechnung der nächsten Zahlen.
- Direktes Erkennen mindestens eines Bildungsgesetzes
- Formulieren des gefundenen Bildungsgesetzes
- Erklären des gefundenen Bildungsgesetzes anhand von Beispielen

Aufgabe 3: Bestimmung der 20. Zahl der Folge

- 20. Figur als Hilfe skizzieren
- Rekursive Berechnung durch fortlaufende Addition (z. B. ausgehend von der zuvor bestimmten Kästchenanzahl der 10. Figur)

⁹ Vgl. Hengartner u. a. 2006, S. 118f



(Vor allem bei den Treppen/Dreieckszahlen ist die explizite Berechnung der Würfelanzahl recht kompliziert, weswegen die Schüler dort vermutlich eher rekursiv vorgehen werden.)

- Geeignete Multiplikationsaufgabe etc. finden (explizite Berechnung)
- Erklären des gefundenen Bildungsgesetzes anhand von Beispielen
- Verallgemeinerung des gefundenen Bildungsgesetzes

Bearbeitungsreihenfolge:

Die Folgen wurden nacheinander behandelt. Den Schülern wurden also erst alle Aufgaben zu den Quadratzahlen nach steigender Schwierigkeit vorgelegt, bevor anschließend die T-Form und dann die Treppen (Dreieckszahlen) behandelt wurden.

Trotzdem stand es den Schülern frei, Arbeitsblätter zu überspringen oder erstmal auszulassen. Durch diese Bearbeitungsreihenfolge (Folgen nacheinander, nicht Aufgabentypen nacheinander) sollte erreicht werden, dass die Schüler sich intensiv in die jeweilige Folge eindenken konnten. So wurde die Chance verbessert, dass die Schüler Bildungsgesetze aufdeckten.

Auswertung

Auswertungsreihenfolge:

Für die Auswertung bietet es sich der Übersicht halber an, gleichartige Aufgaben zusammen zu betrachten. Die Auswertung erfolgt also (im Gegensatz zu der Bearbeitung durch die Kinder) nach Aufgabentypen, nicht nach Folgen. D. h., dass zum Beispiel die Lösungen zur Ermittlung der 20. Folgezahl, **auch von unterschiedlichen Folgen** zusammen ausgewertet werden.

Die Beobachtungsschwerpunkte gelten daher jeweils pro Aufgabe.

Dokumentation des Interviews

Dokumentation

Damit das Interview im Nachhinein möglichst gut ausgewertet werden kann, ist eine Dokumentation der Aufgabenbearbeitung durch die Schüler unbedingt nötig.

Wenn eine Einverständniserklärung der Eltern vorliegt, wird das Interview gefilmt. Ansonsten wird der Ton aufgezeichnet, sodass bei Bedarf auch kurze Transkripte zum Beleg herangezogen werden können. Außerdem bieten natürlich die Schülerdokumente und eventuell Fotos eine wichtige Auswertungs-Grundlage.

Um die Interviewergebnisse zu objektivieren und um sie besser vergleichen zu können, kann man pro Kind einen Beobachtungsbogen (vgl. Anhang) ausfüllen.

Die Auswertung der Schülerbearbeitungen erfolgt dann auf Grundlage der formulierten Beobachtungsschwerpunkte.

Literatur

Franke, M. (2003): Aufgaben, die das Leben schreibt. In A. Peter-Koop & S. Ruwisch (Hg.): *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Offenburg: Mildenerger Verlag, S. 75-88.

Hengartner, E., Hirt, U., Wälti, B. & Primarschulteam Lupsingen (2006, Hg.): *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Klett und Balmer Verlag.

Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW (2008, Hg.): *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*.

http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_gs/LP_GS_2008.pdf (Abruf am 17.06.2012).

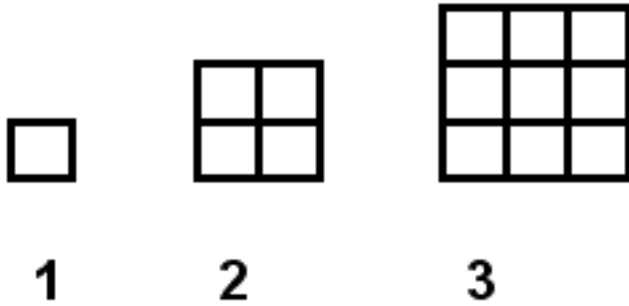
Selter, C. (2004): *Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. Basispapier zum Modul 2: Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule*. <http://www.sinus-grundschule.de/fileadmin/Materialien/Modul2.pdf> (Abruf am: 05.05.2012).

Anhang

Enthaltene Anlagen:

- Arbeitsblätter des Interviewleitfadens (9 Seiten)
- Beobachtungsbögen

Hier siehst du die ersten drei Figuren einer Folge:



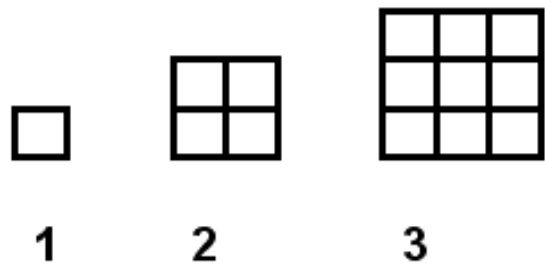
Wie könnte die Folge heißen? Denk dir einen Namen aus:



Male die nächsten drei Figuren.



Woher wusstest du das?



Wie viele Kästchen haben die Figuren?

Trage in die Tabelle ein.

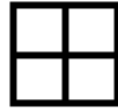
Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Anzahl Kästchen											



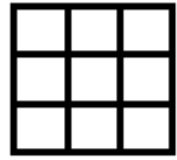
Welche Regelmäßigkeiten fallen dir auf?
Beschreibe deine Beobachtungen!



1



2



3



Wie viele Kästchen hat wohl die 20. Figur?

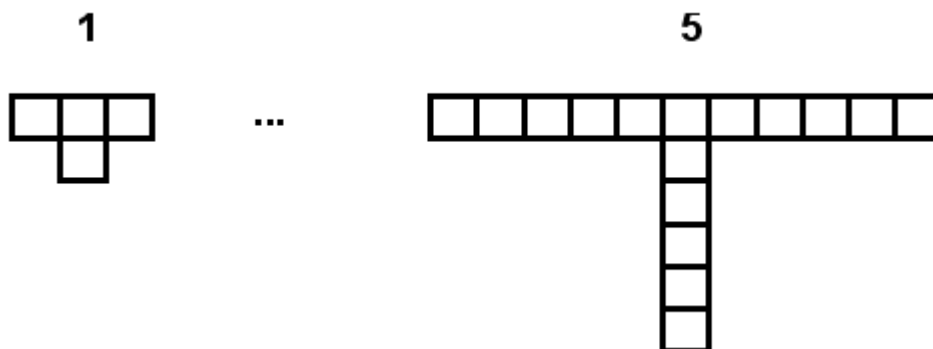
Hier ist Platz für deine Überlegungen:



Erklärung:

T-Form

Hier siehst du die 1. und die 5. Figur der T-Formen.

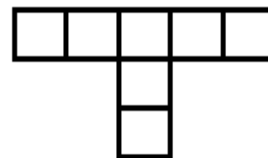
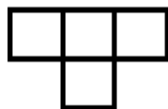


Wie sieht wohl die **3. Figur** aus? Wie die **7. Figur**?
Male auf!



Woher wusstest du das?

T-Form



Wie viele Kästchen haben die Figuren?

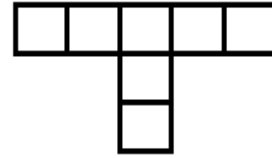
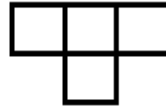
Trage in die Tabelle ein.

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Anzahl Kästchen											



Welche Regelmäßigkeiten fallen dir auf?
Beschreibe deine Beobachtungen!

T-Form



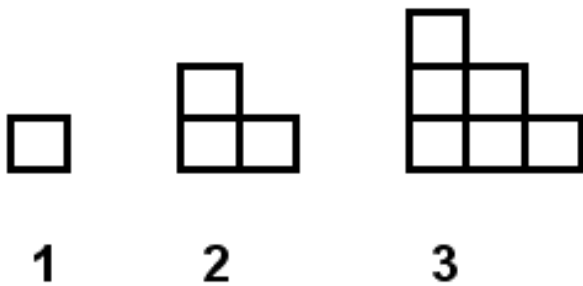
Wie viele kleine Quadrate hat wohl die 20. Figur?

Hier ist Platz für deine Überlegungen:



Erklärung:

Hier siehst du die ersten drei Figuren einer Folge:



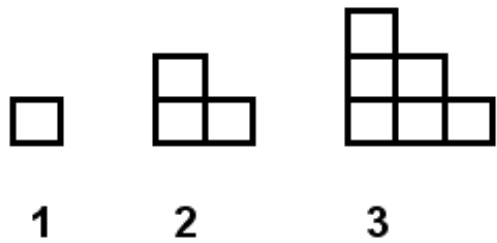
Wie könnte die Folge heißen? Denk dir einen Namen aus:



Male die nächsten drei Figuren.



Woher wusstest du das?



Wie viele Kästchen haben die Figuren?
Trage in die Tabelle ein.

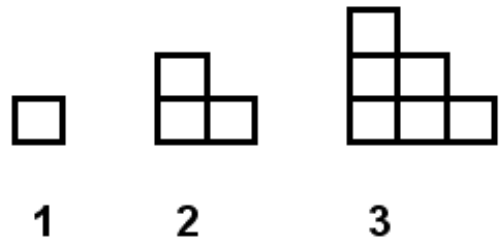
Nummer	1	2	3	4	5	...
Anzahl Kästchen						



Welche Regelmäßigkeiten fallen dir auf?
Beschreibe deine Beobachtungen!



Kommen die Zahlen **25** und **36** in dieser Zahlenfolge vor?
Begründe!



Wie viele kleine Quadrate hat wohl die 20. Figur?

Hier ist Platz für deine Überlegungen:



Erklärung:

Aufgabe	Notizen
1. Einführung des Aufgabenformates	
1.1 Benennung	
Wie könnte die Folge heißen? Denk dir einen Namen aus:	Benennung der Folge:
1.2 Folgen enaktiv oder ikonisch fortsetzen	
<p>Hier siehst du die ersten drei Figuren einer Folge Male die nächsten drei Figuren. <i>Oder</i> Hier siehst du die 1. und die 5. Figur der T-Formen. Wie sieht wohl die 3. Figur aus? Wie die 7. Figur? Male auf!</p>	Kann das Kind die vorgegebenen Figurenfolgen fortsetzen? Wie geht es vor?
Woher wusstest du das?	Begründung de Kindes
	Welche Schwierigkeiten treten unter Umständen auf und warum?

Aufgabe	Notizen
2. Zahlenfolgen symbolisch fortsetzen und Regelmäßigkeiten entdecken	
Wie viele Kästchen haben die Figuren? Trage in die Tabelle ein.	Vorgehen des Kindes. Findet das Kind Regelmäßigkeiten in den Zahlenfolgen? Werden die Regelmäßigkeiten der Zahlenfolge zur Bestimmung weiterer Zahlen der Folge genutzt?
Welche Regelmäßigkeiten fallen dir auf? Beschreibe deine Beobachtungen!	Kann das Kind die Regelmäßigkeiten begründen? Wie?
Kommen die Zahlen 25 und 36 in dieser Zahlenfolge vor? Begründe!	Begründung des Kindes
	Welche Schwierigkeiten treten unter Umständen auf und warum?

Aufgabe	Notizen
3. Weiterführende Aufgabenstellung: Bestimmung der 20. Zahl der Folge	
Wie viele Kästchen hat wohl die 20. Figur?	Wie geht das Kind vor?
Erklärung	Begründung des Kindes
	Welche Schwierigkeiten treten unter Umständen auf und warum?