Nicht nur für Schulanfänger, sondern auch für ältere Schüler gilt, dass sie von dem, was sie im Unterricht erwartet, schon Einiges wissen und können (vgl. Kap. 2 und 3.1): Bei jedem der zentralen Themen des Grundschulrechnens kann man davon ausgehen, dass die Kinder keine „Tabulae rasae" sind, sondern dass sie ihr bis dahin erworbenes Wissen einsetzen um Probleme zu lösen, für die – von der Erwachsenenwarte aus betrachtet – eigentlich die Kenntnis einer neuen Rechenoperation erforderlich ist.

Normalerweise werden den Schülern z. B. keine Aufgaben gestellt, die Aufteil- oder Verteilstruktur aufweisen, bevor die Division im Unterricht behandelt worden ist. Wenn man dies allerdings doch tut und sich die Mühe macht genauer hinzuschauen, kann man über die Vielfalt der Methoden staunen, mit denen sich Kinder helfen, solange sie noch keinen automatisierten Zahlensatz oder ein standardisiertes Verfahren zur Verfügung haben.

Dieses wollen wir anhand eines Beispiels illustrieren: Wir berichten über die Ergebnisse einer Standortbestimmung zum multiplikativen Rechnen, im Rahmen derer 21 Zweitklässlern vor Beginn der entsprechenden Unterrichtsreihe in Einzelinterviews u. a. Textaufgaben mit multiplikativer Struktur gestellt wurden (vgl. Selter 1994, 114 ff.). Vergleichbare Erhebungen sind im Übrigen auch mit einem geringeren Aufwand im Rahmen des normalen Unterrichts durchführbar.

Es existieren ganz unterschiedliche Möglichkeiten, eine Standortbestimmung zu gestalten. Hier wurde folgendes Vorgehen gewählt:

Die Kinder bekamen insgesamt sechs Textaufgaben zur Multiplikation und zur Division gestellt. Sie lasen die jeweils schriftlich dargebotene Aufgabe zunächst leise für sich, dann einmal laut vor. Bei Verständnisschwierigkeiten umschrieb der Interviewer den Wortlaut, gab darüber hinaus jedoch keine weiteren Lösungshilfen.

Im Gegensatz zum sich anschließenden Unterricht wurde bewusst kein Materialgebrauch nahe gelegt (allerdings auch nicht verhindert), um die Kinder zur Produktion schriftlicher Dokumente anzuregen. Die Nutzung von Material hätte bei einigen Kindern leicht differierende Vorgehensweisen, nicht aber fundamental andere Denkstrategien hervorgerufen, wie sich in den weiteren Unterrichtswochen zeigte.

Im Folgenden wollen wir uns auf die Denkwege der Kinder bei der Bearbeitung der sog. „Bonbonaufgabe", konzentrieren:

„In einer Tüte sind 24 Bonbons. 3 Kinder teilen sich die Bonbons."

Hierbei handelt es sich um eine Aufgabe mit Verteilstruktur. Wir betonen dies, da Erwachsene den Unterschied zwischen Verteil- und Aufteilaufgaben in der Regel gar nicht bemerken. Für sie handelt es sich in beiden Fällen um dieselben Aufgaben (hier: 24:3), für die sie die Antwort (hier: 8) entweder schon automatisiert haben oder sich durch Rückgriff auf 8·3=24 oder 3·8=24 verschaffen. Für Kinder dagegen kann der Unterschied zwischen Aufteil- und Verteilaufgaben eine große Rolle spielen, auch wenn er ihnen nicht bewusst sein mag (vgl. Kap. 2.4).

Die Schülerlösungen werden im Folgenden jeweils einem der drei Typen

- „Lösung durch Wissen, Rechnen bzw. Schätzen",
- „Lösung durch Zählen mit Hilfe von Zeichnungen" sowie
- „fehlerhafte Bearbeitung"

zugeordnet. Diese Kategorisierung ist problemlos möglich. Denn zum einen waren die wenigen Bearbeitungen, die zählend, aber *ohne* Zuhilfenahme von Zeichnungen erfolgten, fehlerhaft und sind somit dem dritten Typ zuzuordnen. Und zum anderen gab es keine korrekten Lösungen, bei denen die Schüler rechneten *und* Zeichnungen benutzten.

Lösungen durch Wissen, Rechnen bzw. Schätzen

Neun Schüler lösten die Aufgabe unter Rückgriff auf die Addition und drei mit Hilfe der Subtraktion. Fünf derjenigen Kinder, die addierten, bildeten – verteilnah vorgehend – jeweils Summen aus drei gleich großen Zahlen (Abb. 3). Manuela und Sebastian gaben jeweils spontan an, jedes Kind erhielte acht Bonbons, und notierten auf Nachfrage zwei Gleichungen (Manuela: 8+8=16; 16+8=24) bzw. eine (Sebastian: 24:3=8). Sebastian gab zwar anschließend noch an, das Resultat additiv erhalten zu haben, doch ist es sehr wahrscheinlich, dass er den entsprechenden multiplikativen Zahlensatz (3·8=24) bereits auswendig verfügbar hatte.

Sascha nannte die Antwort „8" zwar nicht direkt, bildete die Summe

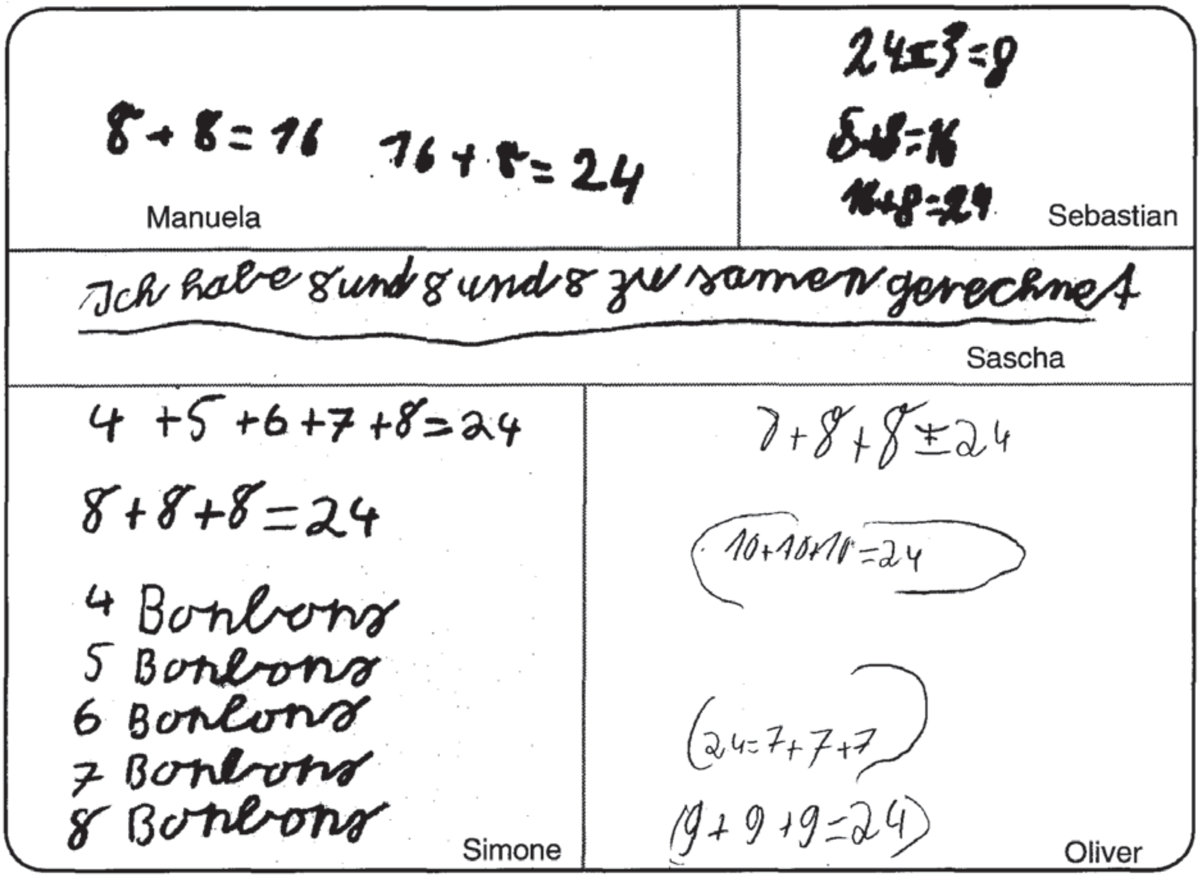

Abb. 3: Lösungen durch Addition dreier Summanden

„8+8+8" jedoch zielgerichtet und verschriftlichte anschließend sein Vorgehen: „Ich habe 8 und 8 und 8 zusammengerechnet."

Simone benutzte ebenfalls aus *genau drei* Summanden bestehende Terme: Sowohl die „Gleichung" „4+5 +6+7+8=24" als auch ihr Kommentar „4 Bonbons, 5 Bonbons, ..., 8 Bonbons" sollten verdeutlichen, dass sie zunächst drei Teilmengen mit vier, dann mit fünf, dann mit sechs Bonbons usw. gebildet und die Gesamtzahl der so verteilten Bonbons jeweils additiv überprüft hatte.

Kaum anders gestaltete sich Olivers Herangehensweise: Er zerlegte zunächst die 24 in drei „Siebener" und errechnete, dass deren Gesamtsumme etwas kleiner war als 24. Dann klammerte er diese Gleichung ein und startete mit „9+9+9=24" einen neuen Versuch. Dass die Gesamtsumme nun zu groß wurde, veranlasste ihn jedoch nicht dazu, die drei Summanden jeweils zu vermindern. Stattdessen notierte er die Zerlegung „10+10+10=24", erkannte jedoch, dass die linke Seite der „Gleichung" nun erst recht zu groß war, und erhielt im nächsten Schritt die gleichmäßige Verteilung („8+8+8=24").

Eine andere Vorgehensweise bestand darin, Summen zu bilden, die *nicht* unbedingt aus *genau drei* Summanden bestehen mussten, um dann durch Variationen der Zahlenwerte zur Lösung zu kommen (vgl. Abb. 4): René und Benni beispielsweise berechneten zunächst, jedes Kind erhielte sechs Bonbons, wenn es vier Kinder wären. Dann verteilten sie die sechs Bonbons, die dem vierten Kind zukamen, gerecht auf die drei anderen und erhielten auf diesem Wege das korrekte Resultat.

Auch Markus benutzte Zerlegungen mit nicht konstanter Summandenzahl, die er allerdings ohne Pluszeichen notierte: Er verteilte die 24 Bonbons zunächst an zwei Kinder, so dass jedes zwölf erhielt. Sodann vermutete er, dass das *Hinzukommen* einer dritten Person die Konsequenz habe, dass jede *ein Bonbon mehr* bekomme. Das deutete er durch die Notation einer 13 rechts neben der 12 an. Diese Überlegung verwarf er jedoch ziemlich schnell und nahm an, die Konsequenz wäre, dass jedes Kind ein Bonbon weniger erhielte. Somit schrieb er die Zerlegung 111111 als Symbolisierung für „11+11+11" hin, bemerkte jedoch, dass die Summe zu groß war.

Er versuchte daher weiterhin, drei gleich große Summanden zu finden, die sich zu 24 ergänzen (9+9+9; 4+4+4). Da diese Strategie jedoch nicht den gewünschten Erfolg hatte, wechselte er die Denkweise und ging nun von der Gesamtzahl 24 aus, die er auf verschiedene Arten in nicht notwendigerweise gleich große Summanden (10+10+4; 5+5+5+5+4) aufspaltete. Anschlie-

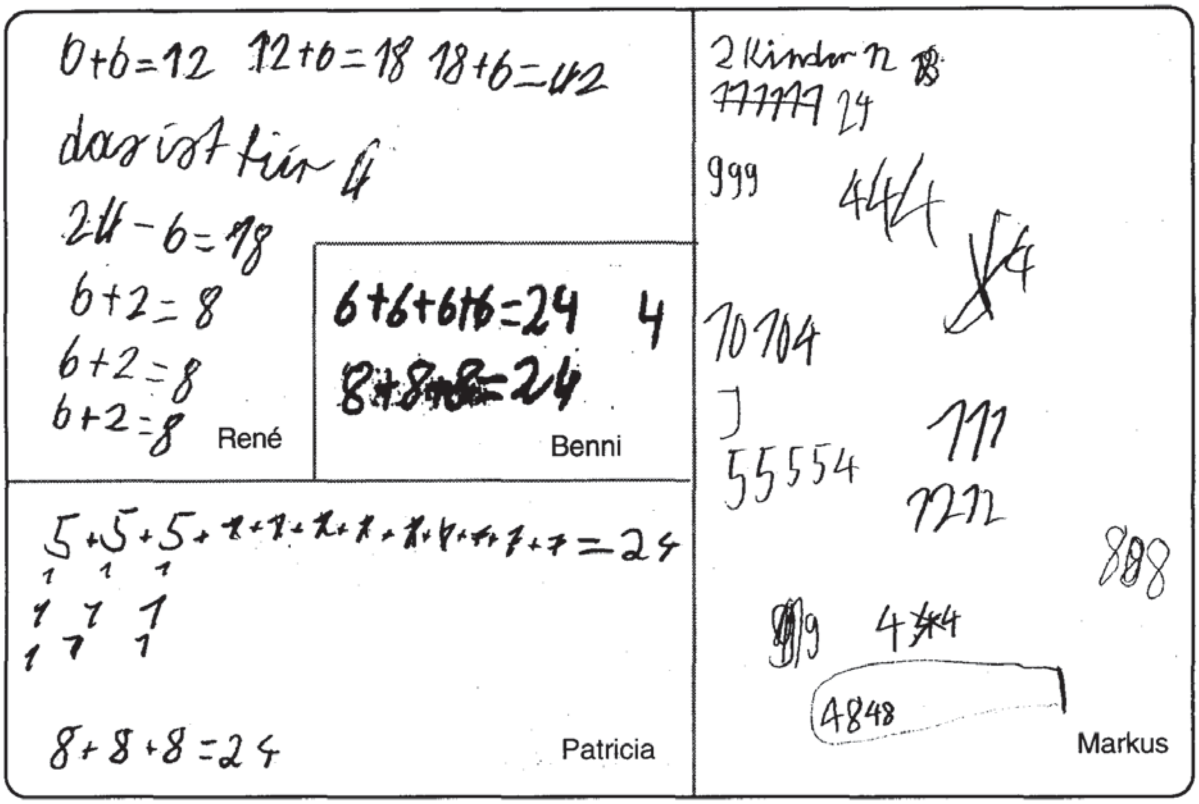

Abb. 4: Lösungen durch Addition mehrerer Summanden

ßend änderte er wiederum sein Vorgehen und überprüfte jeweils additiv, ob die Summe zweier bzw. dreier gleich großer Summanden 24 ergab (12+12; 11+11+11 (abgebrochen); 9+9+9; 4+4+4). Zu guter Letzt wechselte er nochmals das Denkmodell, zerlegte die 24 in vier nicht gleich große Summanden (4+8+4+8), stutzte einen Moment und erhielt schließlich die Lösung, als er zwei Vierer zu einem Achter zusammenfasste.

Auch Patricia ging zunächst nicht von drei gleich großen Summanden aus, sondern zerlegte die 24 in vierzehn Summanden – drei Fünfen und neun Einsen. Dann strich sie die ersten drei Einsen durch und notierte sie jeweils unter den drei Fünfen. Die restlichen Einsen verteilte sie schrittweise analog und fasste zum Schluss eine 5 sowie drei Einsen jeweils zu einer 8 zusammen.

Drei Kinder lösten die „Bonbonaufgabe" durch Subtraktion nicht unbedingt gleich großer Zahlen (vgl. Abb. 5). So zog Nina relativ zielsicher sechsmal die 4 ab.

Angela hingegen gab nach kurzem Überlegen die Antwort, dass sie neun Bonbons übrig behielte. Auf Rückfrage erklärte sie, sie habe von 20 dreimal die 5 subtrahiert, so dass zusammen mit den vier Bonbons, die sie noch nicht berücksichtigt habe, ein Rest von insgesamt neun Bonbons bliebe. Nachdem sie gefragt wurde, ob man diese nicht auch noch verteilen könne, rechnete sie die drei restlichen Aufgaben aus (9−3=6; 6−3=3 sowie 3−3=0), so dass letztendlich jedem Kind acht Bonbons zukamen (Drei Kinder acht Stück.).

Marc-André schließlich subtrahierte dreimal die 4 sowie sechsmal die 2. Um die Lösung anzugeben addierte er dann die 4 und die 4 (2+2) Bonbons, die jedem Kind gehörten.

Lösungen durch Zählen mit Hilfe vo Zeichnungen

Vier Kinder erhielten das richtige Resultat zählend, entweder während sie zeichneten oder im Anschluss daran (vgl. Abb. 6). Nadine malte für das erste (rechts), das zweite (unten) und das dritte Kind (oben) jeweils ein Bonbon hin. Dabei zählte sie von 1 bis 3. Dann

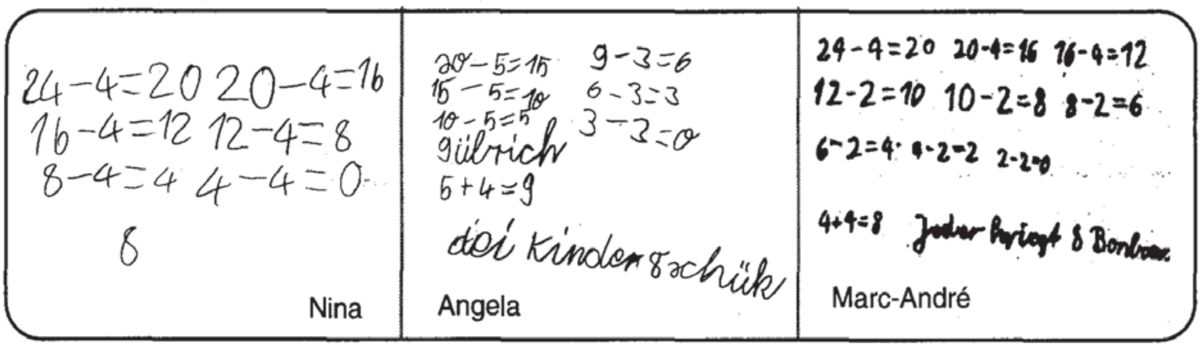

Abb. 5: Lösungen durch Subtraktion

zeichnete sie analog für jedes Kind ein weiteres oberhalb des zuerst gemalten und zählte von 4 bis 6. Dieses Verfahren setzte sie bis 24 fort und ermittelte zum Abschluss die gesuchte Anzahl (Jedes Kind hat 8).

Sven stellte zuerst 24 Kreise im „Rechtecksmuster" dar, strich jeweils ein Bonbon durch, malte es abwechselnd in die linke, die mittlere sowie die rechte Säule und zählte sodann die jeweilige Anzahl ab.

Jennifer malte – jeweils in Dreierschritten zählend – 24 Bonbons und merkte sich parallel dazu, wie viele Dreiergruppen sie aufgezeichnet hatte.

Martin schließlich malte drei Kreise und markierte durch einen kleinen Strich auf jeder der Kreislinien, dass er jedem Kind ein Bonbon geben würde. Dann zählte er rückwärts von 24 bis 21 und merkte sich durch die Notation der 21, wie viele Bonbons verblieben waren. Dieses Verfahren wiederholte er mehrfach, wobei er jeweils die alte Merkzahl durchstrich, bevor er die neue danebenschrieb. So gelangte er auf der Kreislinie einmal „rundherum" sowie in der „Merkzeile" in Dreierschritten rückwärts von der 21 bis zur 3. Beim letzten Schritt verzählte er sich zwar, bemerkte dies jedoch umgehend und ersetzte die bereits vermerkte 1 durch eine 0. Abschließend zählte er die Anzahl der Striche auf jeder Kreislinie ab und schrieb als Lösung eine 8 zwischen Zeichnung und Merkzeile. Unterhalb der ursprünglichen ist eine identisch angelegte Zeichnung zu erkennen, weil Martin abschließend gebeten wurde, sein Verfahren noch einmal kurz zu erklären, was er allerdings zum Anlass nahm, es noch einmal ausführlich darzulegen.

Fehlerhafte Bearbeitungen

Fünf Bearbeitungen wiesen Fehler beim Rechnen, beim Abzählen oder beim Aufgabenverständnis auf (vgl. Abb. 7): Daniela malte zunächst 24 Kreise, kringelte dann jeweils Sechsergruppen ein und sagte, jedes der vier Kinder bekäme sechs Bonbons. Auf Nachfrage erklärte sie, dass sie jedoch nicht wisse, wie sie die Verteilung für drei Kinder durchführen solle. Das Ergebnis des abschließend notierten Zahlensatzes 3+5 lautete zwar 8, doch konnte Daniela keinen *erkennbaren* Bezug zur ursprünglichen Aufgabenstellung angeben.

Achim begann, indem er jedem Kind drei Bonbons gab, was er durch den Zahlensatz 3–3–3 ausdrückte, den er jedoch als unpassend verwarf und einklammerte. Daraufhin teilte er jedem Kind fünf Bonbons zu, beging dabei jedoch den Fehler eine 5 zu vergessen: Er zählte nämlich von 24 ausgehend um 5 rückwärts und notierte den Zahlensatz 24–5. Dann zählte weiter rückwärts bis zur 14 und „protokollierte" dies, indem er seine schriftlichen Aufzeichnungen fortführte (24–5–5). Dabei hatte er die 14 durch die vier abgespreizten Finger

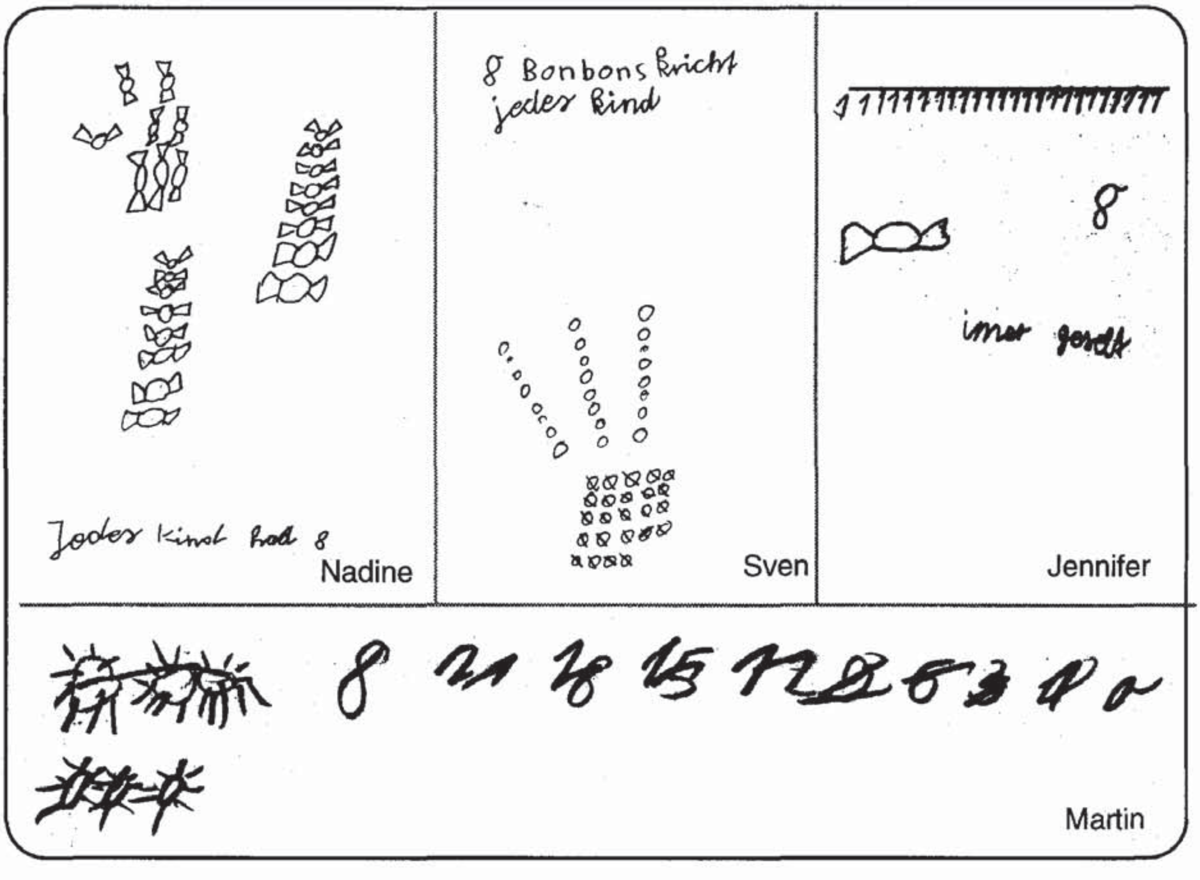

Abb. 6: Lösungen mit Hilfe von Zeichnungen

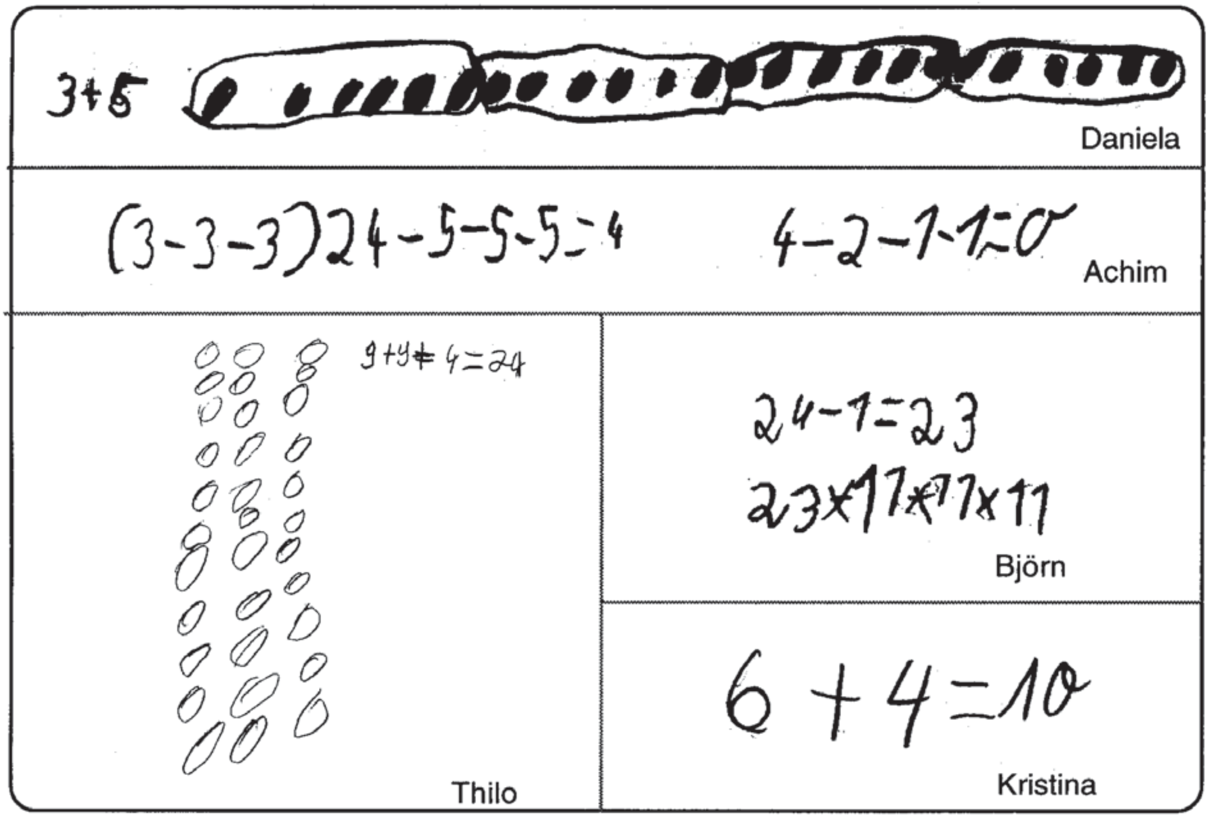

Abb. 7: Fehlerhafte Bearbeitungen

der linken Hand repräsentiert. Allerdings vergaß er beim Niederschreiben, dass er bei 14 angelangt war, und nahm die genauso zu merkende 9 als Ausgangspunkt des nächsten Zählprozesses. Folgerichtig vollendete er den Zahlensatz 24–5–5–5=4. Die restlichen vier Bonbons verteilte er – so gerecht wie möglich – an die drei Personen und gab die zugehörige Differenz mit 4–2–1–1=0 an. Ein Kind, so Achim, bekäme somit sieben, die beiden anderen jeweils sechs Bonbons.

Thilo malte zunächst elf Dreierreihen; jede Spalte sollte dabei ein Kind repräsentieren. Durch Abzählen ermittelte er, dass er ausreichend viele Objekte gezeichnet hatte. Im Weiteren verlor er jedoch – wahrscheinlich – den Bezug zu seiner Zeichnung und teilte dem ersten Kind neun Bonbons zu. Für das zweite Kind sah er ebenfalls neun Bonbons vor, verzählte sich jedoch und gelangte zum Zwischenergebnis 19, das er eigentlich notieren wollte – man erkennt ein Gleichheitszeichen hinter dem Ausdruck 9+9. Für das dritte Kind würden dann noch – erneuter Zählfehler – vier Bonbons übrig bleiben, was Thilo durch die Vervollständigung des Zahlensatzes kenntlich machte. Die Frage, ob es sich hierbei um eine gerechte Verteilung handelte, verneinte er, gab aber andererseits zu verstehen, dass er die Aufgabe nicht besser zu lösen vermochte. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass Thilo bei der Verwendung von Zählobjekten eine korrekte Lösung erhalten hätte. Aus den eingangs genannten Gründen wurde allerdings im Rahmen dieser Standortbestimmung – natürlich nicht im Unterricht – auf deren Einsatz verzichtet.

Björn gab eingangs an, jede Person erhielte zwölf Bonbons, wenn es zwei Kinder wären. Bei drei Kindern hingegen sei es dann jeweils ein Bonbon weniger. Er notierte die Gleichung 24–1=23 und sagte, jedes Kind bekomme elf Bonbons, was er durch den Zahlensatz 23x11x11x11 ausdrückte. Er meinte damit allerdings die Gleichung 23=11+11+11.

Bei Kristina, die allerdings aufgrund von Sprachproblemen den Kontext nicht verstanden zu haben schien, konnte auch durch detailliertes Nachfragen nicht geklärt werden, was sie zur Notation des Zahlensatzes 6+4=10 veranlasst hatte.

Fazit

■ Analysiert man die insgesamt 21 Bearbeitungen, so bleibt erstens festzuhalten, dass insgesamt 16 Schüler – also etwa drei Viertel – die Bonbonaufgabe „korrekt" lösten. Dieser Prozentsatz war im Übrigen bei den anderen Aufgaben der Standortbestimmung ähnlich hoch. Dieses Ergebnis sollte jedoch auch immer vor dem Hintergrund gesehen werden, dass die Schüler in der Regel eben nicht multiplizierten oder dividierten, so wie wir es verstehen, sondern eigene Strategien zur Anwendung brachten, die häufig die Keime für effizienteres multiplikatives Rechnen in sich trugen.

- Es ließen sich zweitens nicht weniger als 19 verschiedene Rechenwege feststellen – lediglich die Bearbeitungen von René und Benni sowie von Manuela und Sascha erscheinen uns gleich. Dabei sind Aussagen über die Denkwege der Schüler stets mit einer gewissen Vorsicht zu treffen, da man nie – auch mit der ausgefeiltesten Methodik nicht – mit letzter Sicherheit wissen kann, ob die Auskünfte der Kinder über ihr eigenes Denken deren Gedankenwelt authentisch abbilden oder vielleicht nicht auch im Nachhinein konstruierte Aussagen sind, um die (vermuteten) Erwartungen des Interviewers zu erfüllen.
- Außerdem möchten wir drittens konstatieren, dass auch bei „falschen Lösungen" – etwa bei Achim oder Daniela – durchaus ein rationaler Kern sowie ein Grundverständnis der Division festzustellen waren.
- Es wurde schließlich viertens deutlich, dass keineswegs alle Schüler bei der Bonbonaufgabe verteilnah rechneten – also drei gleich mächtige Teilmengen bildeten und überprüften, ob deren „Summe" 24 ergab: In Reinform gingen beispielsweise Simone oder Oliver so vor. Daneben konnte beobachtet werden, dass einige Schüler nicht direkt die Gesamtmenge in drei Teilmengen aufsplitteten, sondern Teilmengen davon, etwa Nina oder Angela. Das aufteilnahe Rechnen – also das Bilden von Teilmengen der Mächtigkeit 3 und die Ermittlung von deren Anzahl – nutzte beispielsweise Jennifer. Wir wollen die Denkwege der Schüler im Einzelnen nicht weiter klassifizieren, sondern lediglich festhalten, dass das Denken dieser 21 Schüler sich zwar in oberflächlicher Weise strukturieren lässt, jedoch viel zu komplex ist, um solche Zuordnungen jeweils eindeutig vornehmen zu können.

3.3 Zum Umgang mit „unlösbaren" Textaufgaben

Zu Beginn der achtziger Jahre wurde französischen Zweit- und Drittklässlern die Aufgabe gestellt: „Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?" Von insgesamt 97 Kindern haben 76 die im Text genannten Zahlenwerte miteinander kombiniert und sind auf diesem Wege in der Regel zu dem Ergebnis gekommen, der Kapitän müsse 36 Jahre alt sein.

Achtzig Prozent der Schüler hatten also eine unlösbare Aufgabe durch die Verknüpfung irrelevanter Daten gelöst. Die französischen Forscher haben, „ermutigt durch diese Erfolge", sieben- bis elfjährigen Kindern eine ganze Reihe vergleichbarer Aufgaben vorgelegt. Die Resultate waren kaum anders: So ließen sie etwa Tiere vom Schiff fallen, was die Kinder dazu veranlasste zu subtrahieren, oder sie verwendeten eine große und eine kleine Zahl, was zur Folge hatte, dass die Schüler dividierten (vgl. Baruk 1989).

Als diese Ergebnisse einmal im Rahmen eines Schulpraktikums diskutiert wurden, waren Studierende wie Lehrende fest davon überzeugt, dass vergleichbar niederschmetternde Resultate bei den eigenen Schülern nicht zu beobachten sein würden. Zu aufgeweckt erschienen die insgesamt 20 Kinder, und „normale" Drittklässler, so die feste Überzeugung, würden auf diesen Aufgabentyp niemals „hereinfallen". Um die Richtigkeit dieser Annahme zu überprüfen bekamen die Schüler dann jeweils in Zweiergruppen die folgenden sechs Aufgaben gestellt (vgl. Selter 1994a):

1. Michael ist 8 Jahre alt. Seine Mutter ist 26 Jahre älter als Michael. Wie alt ist sie?
2. Anke ist 12 Jahre alt. Ankes Mutter ist dreimal so alt. Wie alt ist die Mutter?
3. Ein Hirte hat 19 Schafe und 13 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?
4. Ein 27 Jahre alter Hirte hat 25 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?
5. In einer Klasse sind 13 Jungen und 15 Mädchen. Wie alt ist die Lehrerin?
6. Ein Bienenzüchter hat 5 Bienenkörbe mit jeweils 80 Bienen. Wie alt ist der Bienenzüchter?

Die gespannte Erwartung zu Beginn der Interviews, ob überhaupt ein einziger Schüler durch die Aufgaben getäuscht werden würde, wich während deren Verlauf mehr und mehr dem blanken Entsetzen: Denn *sämtliche* Schüler lösten jeweils *alle* sechs Aufgaben, indem sie die angegebenen Zahlen irgendwie zueinander in Beziehung setzten. Sogar bei der vierten Aufgabe, aus deren Wortlaut das Alter des Hirten doch ganz offensichtlich hervorging, hatten die Kinder gerechnet.

Zwei Interviews waren mit der Videokamera dokumentiert worden. Das Studi-