3 Studium von Erfahrungsberichten

Nachdem wir im zweiten Kapitel die Andersartigkeit des mathematischen Denkens von Grundschulkindern anhand von ausgewählten Beispielen aus den verschiedensten Zusammenhängen beschrieben haben, wollen wir nun deren Denkwege bei bestimmten Fragestellungen etwas ausführlicher darstellen.

Hierzu schildern wir ausgewählte Ergebnisse aus vier Forschungsprojekten. Dabei geht es um die Vorkenntnisse von Schulanfängern zur Addition und Subtraktion (3.1), um die informellen Vorgehensweisen von Zweitklässlern bei einer Verteilaufgabe (3.2), um den Umgang von Drittklässlern mit den sog. Kapitänsaufgaben („Auf einem Schiff sind 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?"; 3.3) sowie um die selbst entwickelten Lösungsstrategien von Drittklässlern bei der Addition dreier dreistelliger Zahlen (3.4).

Vorweg wollen wir jedoch einige kurze Bemerkungen zum Durchführen von sog. klinischen Interviews geben. Dabei handelt es sich um die Untersuchungsmethode, die bei vielen Forschungsvorhaben, die durch Erfahrungsberichte, Dokumente oder Erkundungsprojekte in diesem Buch repräsentiert sind, verwendet wurde.

Die Interviewerin muss eingangs in das zu bearbeitende Problem einführen. Während des Interviews muss sie Hypothesen über die Gedanken der Kinder bilden, um in einer flexiblen Weise Fragen stellen zu können, die sich in der Regel auf deren vorangehende Antworten oder Handlungen beziehen.

Beim klinischen Interview geht es also nicht darum, die Kinder durch geschicktes Fragen möglichst schnell zur richtigen Lösung zu führen. Die Hauptintention besteht vielmehr darin, mehr darüber zu erfahren, *wie* Kinder denken. Aus diesem Grund sollten die Reaktionen der Interviewerin grundsätzlich keine negativen Rückmeldungen („Falsch!" oder „Das hätte ich so nicht gemacht!") enthalten. Deren Auftreten lässt die *Aktionen* der Kinder leicht zu *Reaktionen* auf das Verhalten der Interviewerin werden.

Da wir an dieser Stelle nicht ins Detail gehen wollen, verweisen wir auf die weiteren Informationen im Kapitel 5.1.

3.1 Rechenfähigkeit von Schulanfängern

Kinder kommen nicht als „Tabulae rasae" in die Schule, als leere Blätter, die nun von der Lehrerin mit den Kulturtechniken Lesen, Schreiben und Rechnen „beschrieben" werden. Im Laufe der Vorschulzeit – praktisch seit ihrer Geburt – erwerben sie durch aktive Auseinandersetzung mit ihrer Umwelt mehr und mehr an Wissen und Fähigkeiten. Ohne dass sie systematisch unterwiesen werden – wenn auch mit Hilfe gelegentlicher Anregungen und Hinweise –, erschließen sie sich etwa ab Beginn des vierten Lebensjahres auch schon einen Teil der Welt der Zahlen. Das hat die Konsequenz, dass sehr viele Schulanfänger die Reihe der Zahlworte schon ziemlich weit aufsagen, Mengen im Bereich bis 20 sicher abzählen und auch die Zahlzeichen (ein- und zweistellige Zahlen) benennen können (vgl. Krauthausen 1994, 36ff.; Padberg 1986, 28ff.).

Auch bezüglich der Rechenfähigkeit verfügen Schulanfänger häufig schon über ein – z. T. beträchtliches – Vorwissen. Das kann man insbesondere dann feststellen, wenn man geeignete Aufgabenstellungen findet – Aufgaben also, die für die Kinder sinnvoll und verständlich sind.

Formal dargebotene Aufgaben (7+2) setzen die Kenntnis der benutzten Symbole voraus. Dieser Umstand kann es den Kindern erschweren, ihre Kompetenzen zu zeigen. Auch mündlich formulierte Fragen wie etwa „Wie viel ist drei plus vier?" bauen darauf, dass die entsprechende Terminologie („plus") bekannt ist und selbst die Aufgabe „Wie viel ist drei und vier?" muss zunächst einmal richtig gedeutet werden.

Bittet man Kinder hingegen herauszufinden, wie viele Gegenstände es insgesamt sind, wenn beispielsweise zunächst fünf davon da waren und dann drei hinzugekommen sind, dann sind vergleichsweise viele Erstklässler in der Lage, das Ergebnis zu ermitteln. Im Folgenden wird über Ergebnisse einer Interviewreihe berichtet, in der 19 Kindern einer Integrationsklasse zu Beginn des 1. Schuljahres Additions- und Subtraktionsaufgaben in Form der sog. Schachtelaufgaben (vgl. Hughes 1986) sowie als Textaufgaben vorgelegt wurden (vgl. Spiegel 1992).

Zunächst zu den *Schachtelaufgaben:* Bei der Grundaufgabe wird dem Kind eine bestimmte Anzahl von Klötzen (Würfeln, Plättchen, ...) gezeigt (z.B. 5) und es wird gefragt, wie viele es seien. Dann werden die Klötze unter einem deckellosen, umgedrehten Schuhkarton verborgen, bei dem man eine der beiden langen Seitenwände entfernt hat. Wenn diese fehlende Seitenwand für das Kind nicht sichtbar ist, kann man die Rechenobjekte in die Schachtel schieben ohne diese anheben zu müssen. Mit einer weiteren Anzahl von Klötzen (beispielsweise 3) wird die Prozedur wiederholt. Dann wird das Kind gefragt, wie viele Klötze sich jetzt insgesamt unter der Schachtel befinden.

Das Kind kann die Klötze nicht unmittelbar zur Lösungsfindung benutzen. Aber es kann sie – leichter als bei den o. a. Arten der Aufgabenstellung – mit konkreten Bedeutungen verknüpfen, so dass es dann das Ergebnis in der Vorstellung oder unter Zuhilfenahme der Finger rechnend bzw. zählend ermitteln kann.

Die Vorgehensweise bei der Subtraktion ist analog, wobei es zwei Varianten gibt: In beiden Fällen weiß das Kind, wie viele Klötze am Anfang unter der Schachtel liegen. Dann wird eine bestimmte Anzahl herausgenommen. Im ersten Fall darf das Kind sehen, wie viele herausgenommen werden und muss nun bestimmen, wie viele noch darunter sind. Dieses entspricht in formaler Darstellung der Gleichung $a-b=x$, wobei a und b die vorgegebenen Zahlen repräsentieren und x die zu ermittelnde. Bei der anderen Variante darf das Kind sehen, wie viele Klötze übrig sind und muss sagen, wie viele herausgenommen wurden (formal: $a-x=b$).

Zu den verwendeten *Textaufgaben*: Es wurden recht einfach aufgebaute Aufgaben benutzt, die die sechs Grundtypen repräsentieren, die sich aus der jeweiligen Stellung der unbekannten Größe ergeben. Für die Addition handelt es sich um $a+b=x$, $a+x=b$ bzw. $x+a=b$, für die Subtraktion entsprechend um $a-b=x$, $a-x=b$ bzw. $x-a=b$. Zur Illustration geben wir einige Beispiele: „Toni hat 5 Autos, der Papa schenkt ihm noch 2 dazu, wie viele hat er dann?" (formal: $5+2=x$); „Toni hat 5 Autos, wie viele braucht er noch, damit er 8 hat?" (formal: $5+x=8$); „Fine schenkt Toni 4 Bonbons. Dann hat sie noch 7. Wie viele hatte sie vorher?" (formal: $x-4=7$).

Wir wollen zunächst einen Eindruck davon geben, wie eines der Interviews tatsächlich abgelaufen ist. Dabei haben wir uns bewusst entschieden ein noch verbesserungswürdiges Design aus einer frühen Phase des Forschungsprojekts zu verwenden, um zu verdeutlichen, wie anspruchsvoll, aber auch wie lehrreich es sein kann, ein gutes Interviewkonzept zu entwerfen.

Dabei handelt es sich nicht um ein Transkript, in dem versucht wird, das gesamte Geschehen möglichst detailgetreu zu beschreiben, sondern um eine im „Erzählstil" verfasste Wiedergabe des Verlaufs. Der Interviewer spricht in der Ichform, das interviewte Kind (Andrea) wird mit A abgekürzt, Kommentare, die beim Niederschreiben eingefügt wurden, sind eingeklammert.

Schachtelaufgaben

5 + 2 = x Ich lege 5 Klötze neben die Schachtel. A sagt, es seien **5**. Die 5 Klötze werden in die Schachtel geschoben und 2 werden neben die Schachtel gelegt. A sagt, dass es **2** seien; diese werden ebenfalls in die Schachtel gelegt. Auf die Frage, wie viele Klötze in der Schachtel sind, sagt sie sofort **7**. Ich frage nach, wie sie es herausbekommen hat.

Im Kopf nachgerechnet.

Und wie du im Kopf rechnest, kannst du nicht erzählen?

Da denke ich nach, 5, und dann denke ich noch 2 dazu und zähle noch 2 dazu.

3 + 3 = x Nacheinander werden jeweils drei Klötze hineingelegt. A sagt ohne zu zögern: **6**.

8 + 5 = x Als Nächstes lege ich 8 Klötze neben die Schachtel, die A abzählt. Ich schiebe sie in die Schachtel.

Jetzt kommen 10. Als ich verneine, setzt sie fort: **Dann wüsste ich nämlich, was das ist: 18.** Ich zeige 5 und lege sie in den Kasten. Nach kurzem Überlegen sagt sie: **13**.

Wie hast du das gemacht?

A zeigt auf die Kante des rechts stehenden Kastens, in dem die anderen Klötze liegen: **Da habe ich fünfmal dahin geguckt.**

Und hast dann weitergezählt?

A stimmt zu.

2 + 7 = x Auf die Frage, wie viele jetzt in der Schachtel sind, sagt A: **9**.

Wie hast du das herausgefunden?

Ich habe 2 weitergezählt!

(Man denkt natürlich sofort, dass das eine praktische Anwendung des Kommutativgesetzes sei. Aber der Grund dafür, dass sie so rechnet, kann auch ein anderer sein: Die 7 hat sie noch im Kopf, weil es die letztgenannte Zahl ist. Dann braucht sie sich nur noch zu erinnern, dass vorher 2 im Kasten lagen. Es ist unter diesen Umständen vielleicht einfacher, 7 + 2 zu rechnen, als unbedingt die Reihenfolge zu beachten, in der die Klötze hineingelegt worden sind – zumal die Beachtung der Reihenfolge der „Summanden" für das Kind zu Beginn des 1. Schuljahres etwas vollkommen Unwichtiges sein mag.)

9 – 3 = x In den Kasten werden 9 Klötze gelegt, die A vorher nachzählt. Dann werden 3 herausgenommen. A überlegt etwas länger und sagt dann: **6**.

Hast du das auch wieder mit Zählen gemacht?
Das kann ich jetzt so nicht erklären.
8 – 5 = x Als Nächstes lege ich acht Klötze hin – und zwar in einer 5er- und einer 3er-Anordnung. A stellt fest, dass es 8 sind. Ich kann allerdings nicht entscheiden, ob sie diese einzeln abgezählt oder die Strukturierung ausgenutzt hat. Fünf der acht in den Kasten gelegten Klötze werden herausgenommen und danebengelegt. A sagt, dass es **5** seien.
Wie viele sind jetzt noch drin? A überlegt ein wenig: **3**.
Kannst du auch nicht erklären, wie du das gemacht hast? A schüttelt den Kopf.
11 – 4 = x Um 11 Klötze in den Kasten zu legen nehme ich zunächst 9 und dann noch 2. A erkennt sofort, dass es 11 sind. Diese kommen in den Kasten, ich nehme 4 heraus und lege sie offen neben den Kasten:
Wie viele sind jetzt noch drin?"
A überlegt eine halbe Minute lang: **Weiß ich nicht.**
4 + x = 7 Ich lege für sie zunächst sichtbar 4, dann verdeckt 3 weitere Klötze in den Kasten. Dann nehme ich den Kasten weg. A darf sehen, wie viele Klötze nun im Kasten liegen und soll mir sagen, wie viele ich dazugelegt habe.
Sie guckt auf die 7: **Vorher waren es 4**, und sagt dann: **3**.
(Dieser Aufgabentyp wurde bei späteren Interviews weggelassen, weil er sich als vergleichsweise einfach erwies. Man kann nämlich die Lösung erhalten, indem man die Operation rückgängig macht, d. h. die vier permanent sichtbaren Klötze von den anderen, erst jetzt sichtbaren separiert und die Lösung durch Bestimmen ihrer Anzahl ermittelt.)
7 – x = 5 Ich lege 7 Klötze auf den Tisch, so dass sie die Anzahl bestimmen kann. Dann decke ich sie durch den Kasten ab und nehme 2 verdeckt heraus. A bekommt die verbliebenen 5 zu sehen und auf die Frage, wie viele ich herausgenommen habe, sagt sie sofort: **2**.
Wie hast du das herausgefunden?"
A tippt zweimal mit dem Finger auf den Tisch. (Sie will wohl andeuten, dass sie durch Weiterzählen auf 7 ergänzt hat.)
7 + 2 = x Ich lege zunächst 7 Klötze auf den Tisch, lege noch 2 dazu und frage: *Wie viele sind das jetzt?*
9, habe ich mitgezählt.
Die 9 Klötze werden abgedeckt und ich nehme verdeckt 4 heraus. Die restlichen 5 werden aufgedeckt: *Wie viele habe ich rausgenommen?*
A sagt ziemlich schnell: **4**. Auf die Frage, wie sie das herausgefunden habe, sagt sie: **Wieder auf den Tisch geguckt.** (Wahrscheinlich hat sie von den 5 daliegenden aus in Gedanken weitergezählt bis 9.)
x + 3 = 9 Ich lege 6 Klötze verdeckt in den Kasten und 3 zunächst sichtbar daneben, dann hinein. Der Kasten wird aufgedeckt. A kann sehen, wie viele jetzt insgesamt darin liegen und soll entscheiden, wie viele vorher im Kasten waren. **6**.
Wie hast du das herausgefunden?
Nachgezählt.
(Dieser Aufgabentyp unterscheidet sich – wie der bereits oben kommentierte – von den anderen im Anspruchsniveau: Man kann die Lösung durch unmittelbares Rückgängigmachen der Operation finden, nämlich die 3 einfach wieder wegnehmen, die dazugetan worden sind, und dann nachzählend das Ergebnis feststellen, ohne dass man rechnen muss. Aus diesem Grunde wurde dieser Aufgabentyp in späteren Interviews ebenfalls weggelassen.)
x – 3 = 4 Zunächst lege ich verdeckt 7 Klötze in den Kasten und nehme dann verdeckt 3 heraus. Der Kasten wird aufgedeckt. A sieht die 4 übrigen, dann lege ich die herausgenommenen 3 auf den Tisch.
Wie viele waren vorher drin?"
Sie überlegt und gleichzeitig nehme ich die 3 Klötze wieder weg.
Dann sagt sie: **7**.
(Auch dieser Aufgabentyp schien in dieser Form etwas fragwürdig zu sein, zumindest wenn am Ende die Menge aller Klötze, die auch das Ergebnis darstellt, offen vor den Augen des Kindes auf dem Tisch liegt.)

Im Anschluss werden einige Textaufgaben gestellt. Auf dem Tisch liegen zwei Mengen von jeweils zehn roten bzw. gelben Steckwürfeln, die zur Bearbeitung der Aufgaben zur Verfügung stehen, sofern Andrea sie benötigt. Da sie am liebsten mit Pferden rechnen will, werden Aufgaben aus diesem Kontext gestellt. Diese können selbstverständlich nicht als realistisch gelten, für Andrea stellen sie allerdings zu diesem Zeitpunkt einen bedeutungshaltigen Sinnzusammenhang dar.

Textaufgaben

3 + 4 = x *Toni hat 3 Pferde, die Mama schenkt ihm noch 4 Pferde. Wie viele hat er dann?"*
A überlegt, schaut auf den Tisch, nimmt jedoch nicht die Klötze und antwortet: **7.**
7 + 5 = x *Toni hat 7 Pferde, die Mama schenkt ihm noch 5 dazu, wie viele hat er dann?*
A überlegt einen Moment, dann wendet sie sich dem Haufen der gelben Klötze zu, sagt: **7**, schiebt mit den Fingern nacheinander 5 dieser Klötze zur Seite und sagt: **12.** (Sie löst die Aufgabe also durch Weiterzählen von 7 an. Dadurch dass sie die Klötze benutzt, kann sie auch leicht übersehen, wann sie um 5 weitergezählt hat.)
5 + x = 8 *Fine hat 5 Pferde, sie möchte aber 8 haben. Wie viele braucht sie noch?*
Sie überlegt und schaut auf den Tisch. Dann legt sie plötzlich ihre volle rechte Hand auf den Tisch, guckt darauf und sagt: **3**.
Hast du das mit deinen Fingern gerechnet? **Ja.**
Und wie? **Draufgeguckt.**
(Vermutlich hat sie im Kopf von diesen 5 aus um 3 weitergezählt.)
8 + x = 12 *Fine hat 8 Pferde und möchte 12 haben, wie viele braucht sie dann?*
Sie legt wieder die ausgestreckte Hand auf den Tisch, guckt darauf und sagt dann: **4**.
Wie kann man das mit den Fingern machen? Du hast doch gar keine 12 Finger? Sie gibt keine Antwort.
(Es ist unmöglich festzustellen, wie sie es gemacht hat. Eine Möglichkeit besteht beispielsweise darin, dass sie die Finger als Zählhilfe nimmt: So kann sie beim Weiterzählen von 8 bis 12 gewährleisten, dass sie um genau 4 weiterzählt.)
x + 3 = 8 *Die Mama schenkt dem Toni 3 Pferde. Dann hat er 8. Wie viele hatte er vorher?"*
A sagt nach einer Weile: **5** und ergänzt dann: **Das hatten wir schon bei Fine, nur umgekehrt**. (Sie erkennt, dass die Grundbeziehung 5 + 3 = 8 hier in einer anderen Variation wieder auftritt. Es ist natürlich klar, dass diese Aufgabe leichter zu lösen ist, wenn man den Zahlensatz 5 + 3 = 8 bereits verfügbar hat.)
9 – 5 = x *Fine hat 9 Pferde, 5 davon schenkt sie dem Toni. Wie viele hat sie übrig?*
A sagt nach einigem Überlegen: **3**.
Wie hast du das herausgefunden?
A sagt, dass wir eine ähnliche Aufgabe bereits einmal hatten.
Wenn ich dir das jetzt nicht glaube, wie kannst du mir das erklären?
Sie nimmt die Klötze zu Hilfe. Jedoch anstatt sich 9 zu nehmen und davon 5 wegzunehmen, nimmt sie zunächst 5 und legt sie beiseite. Von den restlichen Klötzen nimmt sie nacheinander noch 4 weitere weg und sagt dann, sie habe 4 Pferde.
(Auch hier scheint sie wieder von 5 bis 9 weitergezählt zu haben. Sie löst also im Prinzip ein sich von der Aufgabenstellung her als Subtraktion darstellendes Problem durch Ergänzen.)
7 – x = 3
Fine hat 7 Pferde. Sie schenkt Toni welche. Dann hat sie noch 3. Wie viele hat sie verschenkt?
A überlegt ein wenig und sagt dann: **3**.

Ich bestätige und frage: *Ist das schon etwas schwerer als vorhin, das auszurechnen?*
A nickt. *Warum ist es denn schwerer?*
Nicht viel schwerer, ich weiß, dass 4 und 4 8 macht, und dann sind das 7 gewesen, und dann habe ich 1 weniger, und dann habe ich davon alle weggenommen bis auf 4, und dann sind so viel übrig geblieben."
(Dieses ist ein sehr schönes Beispiel für die spontane Nutzung operativer Rechenmethoden.)
x – 3 = 2 *Fine schenkt Toni 3 Pferde, dann hat sie noch 2. Wie viele hatte sie vorher?*
Sie überlegt ein wenig und sagt dann: **5.**

Das Interview mit Andrea verdeutlicht, dass sie viele der Anforderungen des 1. Schuljahres schon zu Beginn desselben bewältigen konnte – und damit war sie beileibe kein Einzelfall. Das Leistungsniveau der interviewten Kindergruppe war beachtlich. Den 15 nichtbehinderten der insgesamt 19 Kinder wurden 363 Aufgaben (71 mit Zehnerübergang) gestellt, im Einzelnen 193 Schachtelaufgaben und 170 Textaufgaben. Etwa drei Viertel der Schachtel- und auch der Textaufgaben lösten sie auf Anhieb richtig.

Natürlich kann man von diesen Interviews nicht automatisch auf die Fähigkeiten von Schulanfängern generell schließen, da die geringe Anzahl der zudem nicht als repräsentativ ausgewählt geltenden Kinder dieses nicht erlaubt. Aber die Untersuchung hat zumindest ergeben, dass diese fünfzehn Schulanfänger 75% derjenigen Aufgaben, die Gegenstand des Unterrichts im 1. Schuljahr sind, bereits weitgehend mühelos lösen konnten. Ähnliche Ergebnisse bezüglich der arithmetischen Vorkenntnisse von Schulanfängern ergaben sich auch in den Interviewstudien von Schmidt & Weiser (1982) oder von Hengartner & Röthlisberger (1995).

Mindestens genauso interessant wie globale Feststellungen über die Leistungen der Kinder ist ein Einblick in die Vielfalt ihrer Vorgehensweisen. Im Folgenden sind Episoden aus den Interviews zusammengestellt, die einen ersten Eindruck von einigen interessanten Strategien und Fehlern geben. Wir beginnen mit einigen Beispielen zu den Schachtelaufgaben.

- Lina stellt die 8 mit nur 3 Fingern einer Hand dar (5+3=8). Die 5 restlichen Finger der anderen Hand benötigt sie dazu nicht.
- Andrea löst 8+5 richtig mit 13. Sie hat das Ergebnis durch Weiterzählen erhalten und erklärt, dass sie dabei fünfmal auf den Schachtelrand geguckt hat. 2+7 löst sie, indem sie von 7 aus um 2 weiterzählt.
- Lina ermittelt 12 als das Ergebnis von 7+5. Sie zählt auch weiter von 7 und benutzt dabei die 5 Finger ihrer einen Hand als Hilfe.
- Lucy erhält 13 für 9+2. Ihre Erklärung: „Nach 10 kommt doch 13."
- Raphael berechnet zu 7+5 das Ergebnis 14. Er erinnert sich daran, dass er bei einer anderen Aufgabe 8+3=13 gerechnet hat, und lässt erkennen, dass er von dort aus über 8+5=15 („Noch 2 dazu, das sind 15 und das waren ja noch 2 dazu, wie bei der 3.") zu 7+5=14 gekommen ist.
- Jana legt sich 9 Klötze in einer 4+4+1-Anordnung hin. Auf Nachfrage, wie sie dann 5 als Ergebnis von 9–4 erhalten habe, gibt sie eine Erklärung ab, die darauf schließen lässt, dass sie die entsprechende Operation am Vorstellungsbild der von ihr strukturierten Menge vorgenommen hat. 12–x=7 löst sie durch Weiterzählen von 7 bis 12, wobei sie mit den Fingern auf den Tisch tippt. Allerdings hat sie einige Schwierigkeiten gleichzeitig mitzuzählen, dass sie fünfmal tippt.

Auch bei den Textaufgaben ließen sich solche Rechenstrategien feststellen:

- I: „Der Papa schenkt der Fine 3 Bonbons, dann hat sie 8. Wie viele hatte sie vorher?" Nach einer halben Minute sagt Tim: „5". Auf Nachfrage ergänzt er: „Ich habe bei 8 angefangen zu zählen, rückwärts."
- I: „Fine hat 5 Pferde, sie möchte aber 8 haben. Wie viele braucht sie noch?" Andrea antwortet mit 3. Vermutlich hat sie – ausgehend von der plötzlich auf den Tisch gelegten vollen Hand – von 5 weiter bis zur 8 gezählt, vielleicht unter Zuhilfenahme der Vorstellung der Finger.
- I: „Fine hat 9 Pferde, 5 davon schenkt sie dem Toni. Wie viele hat sie übrig?" Als Andrea mit Hilfe von Klötzen die Lösung 4 erklären will, nimmt sie 5 Klötze und ergänzt diese dann um 4 auf 9.
- I: „Fine hat 7 Pferde. Sie schenkt dem Toni welche. Dann hat sie noch 3. Wie viele hat sie verschenkt?" Aus der Erklärung von Andrea geht hervor, dass sie sich über 4+4=8 die Zerlegung 4+3=7 und damit die Lösung 4 erschlossen hat.

Die Kinder verwendeten also die unterschiedlichsten Strategien zur Lösung der

Aufgaben. Dabei fiel auf, dass viele von ihnen schon bei der Anzahlbestimmung spontan rechneten, also beispielsweise 3 Klötze und 2 Klötze addierten, anstatt diese von 1 bis 5 abzuzählen. Man konnte den Eindruck gewinnen, dass sie von sich aus das Stück-für-Stück-Zählen als minderwertige Vorgehensweise einschätzten und es eleganter machen wollten. Beim Ermitteln der Ergebnisse waren in der Hauptsache die folgenden Vorgehensweisen zu beobachten:

- Benutzung auswendig verfügbarer Zahlensätze,
- Zählen (Zahlenreihe im Kopf; vorgestellte Objekte; Finger; Klötze),
- Weiterzählen (beim Addieren bzw. beim Ergänzen) bzw. Rückwärts zählen (beim Subtrahieren),
- operatives Rechnen (2+6=8, weil 4+4=8; oder: 2+3=5, weil 3+3=6; oder: 7+5=14, weil 8+3=13).

Auch wenn die Erkenntnisse nicht unmittelbar generalisiert werden können, so lassen sich doch aus den Beobachtungen und vergleichbaren empirischen Befunden Schlussfolgerungen mit allgemeinerem Charakter ziehen, die über diese Untersuchung hinausweisen.

1. Es gibt (nicht wenige) Kinder, bei denen Quantität und Qualität der Vorkenntnisse weit über dem Niveau liegen, bei dem übliche Schulbücher ansetzen. Dass diese in den wenigsten Fällen Resultat systematischer Unterweisung sind, weist auf die Wirksamkeit der selbstbestimmten, nicht organisierten Lernprozesse hin, die vor Beginn der Schule ablaufen. Die Ergebnisse unterstützen das Bild vom Kind als Baumeister der eigenen Erkenntnis, dem nicht Wissen vermittelt werden muss, sondern für das Anregungen geschaffen werden müssen, das eigene Wissen möglichst selbständig weiterzuentwickeln.
2. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Schülern sind schon zu Schulbeginn sehr groß. Vom Abzählen an den Objekten bis hin zur auswendigen Verfügbarkeit der benötigten Zahlensätze reicht die Bandbreite ihrer Lösungen. Es kann nicht darum gehen, diese dadurch zu nivellieren, dass man Vorkenntnisse ignoriert und dadurch Kindern Lernchancen vorenthält und ihnen die Lernmotivation nimmt. Wichtig ist, sensibel für mögliches Vorwissen zu werden und so viel wie möglich darüber herauszufinden, was die einzelnen Kinder schon können. Ausgehend davon ist es von zentraler Bedeutung, Lernangebote so differenziert zu gestalten, dass sie den individuellen mathematischen Fähigkeiten (und auch den „Defiziten") aller Schüler möglichst gut gerecht werden.
3. Der Unterricht sollte also nicht gleichschrittig nach dem Schulbuch – Seite für Seite – vorgehen und sich auch nicht überwiegend damit befassen, Kinder formalsprachliche Mathematik lesen und schreiben zu „lehren", die sie inhaltlich schon beherrschen (Mathematik als erste Fremdsprache!). Schließlich sollte er ihnen auch nicht die Möglichkeit zum Rechnen so lange vorenthalten, bis sie gelernt haben mit den Symbolen umzugehen. Stattdessen sollte das mündliche Rechnen von Anfang an gepflegt werden. Weiterhin gehört zu einem Unterricht, der die Vorkenntnisse der Kinder ernst nimmt, ein ganzheitlicher Einstieg, also die Möglichkeit für die Kinder, den gesamten Zwanzigerraum von Anfang an zu erkunden (vgl. Wittmann & Müller 1995).
4. Den Kindern sollte schon im Anfangsunterricht möglichst wenig vorgeschrieben werden, wie sie zu denken, zu rechnen und ihre Lösungen aufzuschreiben haben. Fehlern sollte so weit wie möglich nachgegangen werden, so dass der Anteil richtigen Denkens, der sich häufig hinter ihnen verbirgt, offenkundig werden kann.

Nicht nur für Schulanfänger, sondern auch für ältere Schüler gilt, dass sie von dem, was sie im Unterricht erwartet, schon Einiges wissen und können (vgl. Kap. 2 und 3.1): Bei jedem der zentralen Themen des Grundschulrechnens kann man davon ausgehen, dass die Kinder keine „Tabulae rasae“ sind, sondern dass sie ihr bis dahin erworbenes Wissen einsetzen um Probleme zu lösen, für die – von der Erwachsenenwarte aus betrachtet – eigentlich die Kenntnis einer neuen Rechenoperation erforderlich ist.

Normalerweise werden den Schülern z. B. keine Aufgaben gestellt, die Aufteil- oder Verteilstruktur aufweisen, bevor die Division im Unterricht behandelt worden ist. Wenn man dies allerdings doch tut und sich die Mühe macht genauer hinzuschauen, kann man über die Vielfalt der Methoden staunen, mit denen sich Kinder helfen, solange sie noch keinen automatisierten Zahlensatz oder ein standardisiertes Verfahren zur Verfügung haben.

Dieses wollen wir anhand eines Beispiels illustrieren: Wir berichten über die Ergebnisse einer Standortbestimmung zum multiplikativen Rechnen, im Rahmen derer 21 Zweitklässlern vor Beginn der entsprechenden Unterrichtsreihe in Einzelinterviews u. a. Textaufgaben mit multiplikativer Struktur gestellt wurden (vgl. Selter 1994, 114 ff.). Vergleichbare Erhebungen sind im Übrigen auch mit einem geringeren Aufwand im Rahmen des normalen Unterrichts durchführbar.

Es existieren ganz unterschiedliche Möglichkeiten, eine Standortbestimmung zu gestalten. Hier wurde folgendes Vorgehen gewählt:

Die Kinder bekamen insgesamt sechs Textaufgaben zur Multiplikation und zur Division gestellt. Sie lasen die jeweils schriftlich dargebotene Aufgabe zunächst leise für sich, dann einmal laut vor. Bei Verständnisschwierigkeiten umschrieb der Interviewer den Wortlaut, gab darüber hinaus jedoch keine weiteren Lösungshilfen.

Im Gegensatz zum sich anschließenden Unterricht wurde bewusst kein Materialgebrauch nahe gelegt (allerdings auch nicht verhindert), um die Kinder zur Produktion schriftlicher Dokumente anzuregen. Die Nutzung von Material hätte bei einigen Kindern leicht differierende Vorgehensweisen, nicht aber fundamental andere Denkstrategien hervorgerufen, wie sich in den weiteren Unterrichtswochen zeigte.

Im Folgenden wollen wir uns auf die Denkwege der Kinder bei der Bearbeitung der sog. „Bonbonaufgabe“, konzentrieren:

„In einer Tüte sind 24 Bonbons. 3 Kinder teilen sich die Bonbons.“

Hierbei handelt es sich um eine Aufgabe mit Verteilstruktur. Wir betonen dies, da Erwachsene den Unterschied zwischen Verteil- und Aufteilaufgaben in der Regel gar nicht bemerken. Für sie handelt es sich in beiden Fällen um dieselben Aufgaben (hier: 24 : 3), für die sie die Antwort (hier: 8) entweder schon automatisiert haben oder sich durch Rückgriff auf $8 \cdot 3 = 24$ oder $3 \cdot 8 = 24$ verschaffen. Für Kinder dagegen kann der Unterschied zwischen Aufteil- und Verteilaufgaben eine große Rolle spielen, auch wenn er ihnen nicht bewusst sein mag (vgl. Kap. 2.4).

Die Schülerlösungen werden im Folgenden jeweils einem der drei Typen

- „Lösung durch Wissen, Rechnen bzw. Schätzen“,
- „Lösung durch Zählen mit Hilfe von Zeichnungen“ sowie
- „fehlerhafte Bearbeitung“

zugeordnet. Diese Kategorisierung ist problemlos möglich. Denn zum einen waren die wenigen Bearbeitungen, die zählend, aber *ohne* Zuhilfenahme von Zeichnungen erfolgten, fehlerhaft und sind somit dem dritten Typ zuzuordnen. Und zum anderen gab es keine korrekten Lösungen, bei denen die Schüler rechneten *und* Zeichnungen benutzten.

Lösungen durch Wissen, Rechnen bzw. Schätzen

Neun Schüler lösten die Aufgabe unter Rückgriff auf die Addition und drei mit Hilfe der Subtraktion. Fünf derjenigen Kinder, die addierten, bildeten – verteilnah vorgehend – jeweils Summen aus drei gleich großen Zahlen (Abb. 3). Manuela und Sebastian gaben jeweils spontan an, jedes Kind erhielte acht Bonbons, und notierten auf Nachfrage zwei Gleichungen (Manuela: $8+8=16$; $16+8=24$) bzw. eine (Sebastian: $24:3=8$). Sebastian gab zwar anschließend noch an, das Resultat additiv erhalten zu haben, doch ist es sehr wahrscheinlich, dass er den entsprechenden multiplikativen Zahlensatz ($3 \cdot 8=24$) bereits auswendig verfügbar hatte.

Sascha nannte die Antwort „8“ zwar nicht direkt, bildete die Summe

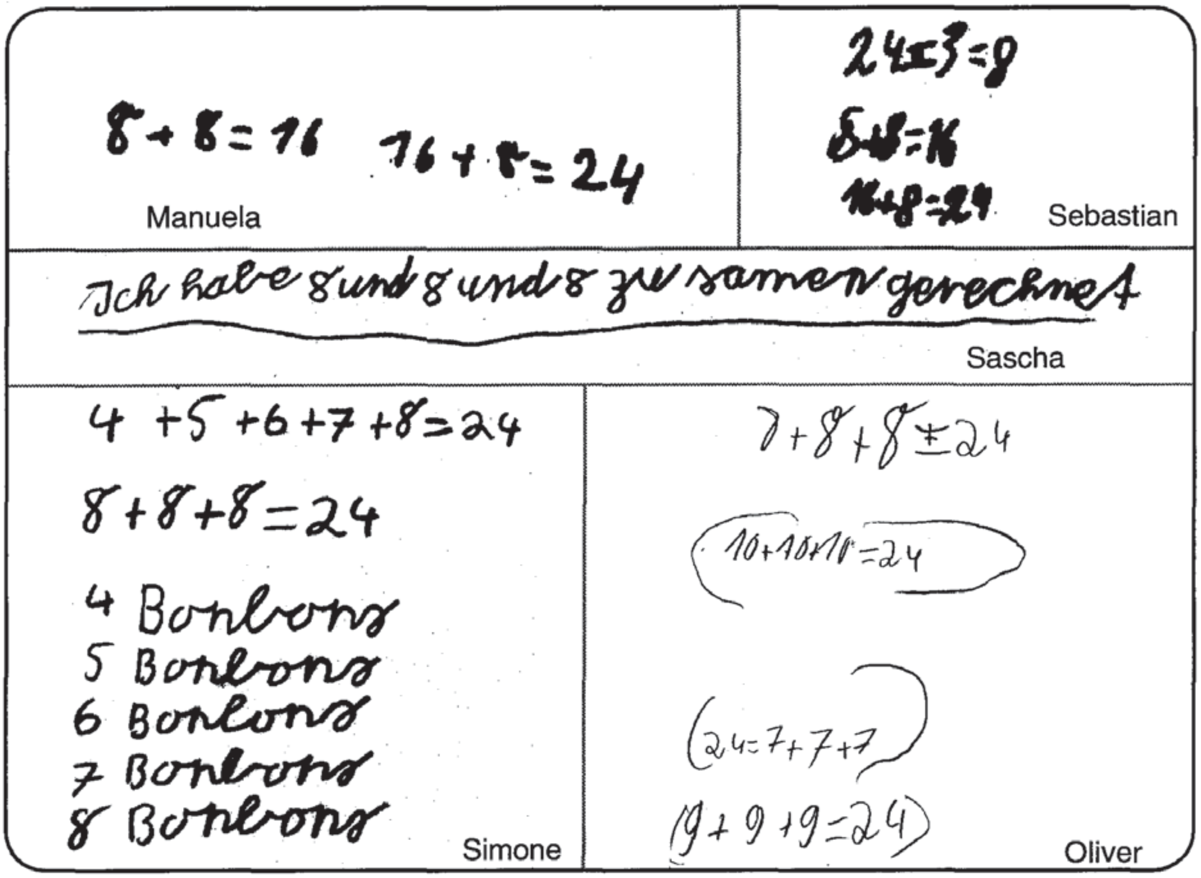


Abb. 3: Lösungen durch Addition dreier Summanden

„8+8+8" jedoch zielgerichtet und verschriftlichte anschließend sein Vorgehen: „Ich habe 8 und 8 und 8 zusammengerechnet."

Simone benutzte ebenfalls aus *genau drei* Summanden bestehende Terme: Sowohl die „Gleichung" „4+5 +6+7+8=24" als auch ihr Kommentar „4 Bonbons, 5 Bonbons, …, 8 Bonbons" sollten verdeutlichen, dass sie zunächst drei Teilmengen mit vier, dann mit fünf, dann mit sechs Bonbons usw. gebildet und die Gesamtzahl der so verteilten Bonbons jeweils additiv überprüft hatte.

Kaum anders gestaltete sich Olivers Herangehensweise: Er zerlegte zunächst die 24 in drei „Siebener" und errechnete, dass deren Gesamtsumme etwas kleiner war als 24. Dann klammerte er diese Gleichung ein und startete mit „9+9+9=24" einen neuen Versuch. Dass die Gesamtsumme nun zu groß wurde, veranlasste ihn jedoch nicht dazu, die drei Summanden jeweils zu vermindern. Stattdessen notierte er die Zerlegung „10+10+10=24", erkannte jedoch, dass die linke Seite der „Gleichung" nun erst recht zu groß war, und erhielt im nächsten Schritt die gleichmäßige Verteilung („8+8+8=24").

Eine andere Vorgehensweise bestand darin, Summen zu bilden, die *nicht* unbedingt aus *genau drei* Summanden bestehen mussten, um dann durch Variationen der Zahlenwerte zur Lösung zu kommen (vgl. Abb. 4): René und Benni beispielsweise berechneten zunächst, jedes Kind erhielte sechs Bonbons, wenn es vier Kinder wären. Dann verteilten sie die sechs Bonbons, die dem vierten Kind zukamen, gerecht auf die drei anderen und erhielten auf diesem Wege das korrekte Resultat.

Auch Markus benutzte Zerlegungen mit nicht konstanter Summandenzahl, die er allerdings ohne Pluszeichen notierte: Er verteilte die 24 Bonbons zunächst an zwei Kinder, so dass jedes zwölf erhielt. Sodann vermutete er, dass das *Hinzukommen* einer dritten Person die Konsequenz habe, dass jede *ein Bonbon mehr* bekomme. Das deutete er durch die Notation einer 13 rechts neben der 12 an. Diese Überlegung verwarf er jedoch ziemlich schnell und nahm an, die Konsequenz wäre, dass jedes Kind ein Bonbon weniger erhielte. Somit schrieb er die Zerlegung 111111 als Symbolisierung für „11+11+11" hin, bemerkte jedoch, dass die Summe zu groß war.

Er versuchte daher weiterhin, drei gleich große Summanden zu finden, die sich zu 24 ergänzen (9+9+9; 4+4+4). Da diese Strategie jedoch nicht den gewünschten Erfolg hatte, wechselte er die Denkweise und ging nun von der Gesamtzahl 24 aus, die er auf verschiedene Arten in nicht notwendigerweise gleich große Summanden (10+10+4; 5+5+5+5+4) aufspaltete. Anschlie-

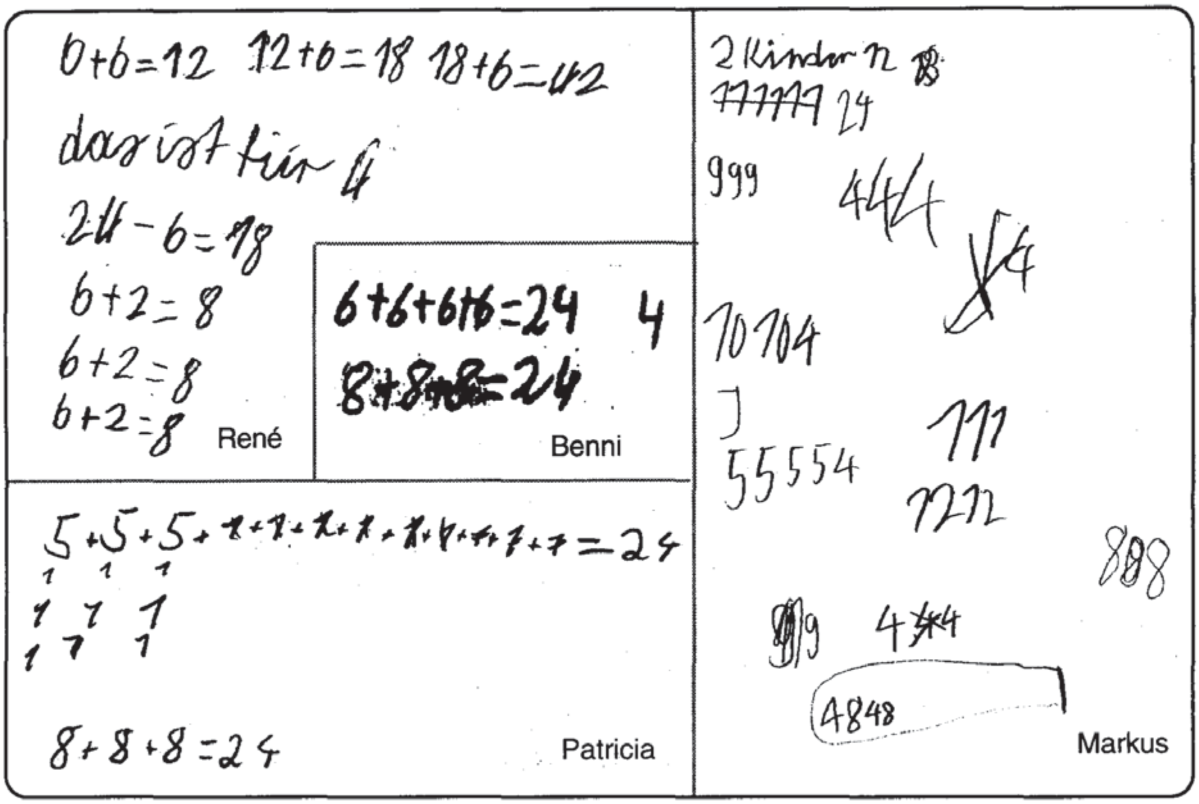


Abb. 4: Lösungen durch Addition mehrerer Summanden

ßend änderte er wiederum sein Vorgehen und überprüfte jeweils additiv, ob die Summe zweier bzw. dreier gleich großer Summanden 24 ergab (12+12; 11+11+11 (abgebrochen); 9+9+9; 4+4+4). Zu guter Letzt wechselte er nochmals das Denkmodell, zerlegte die 24 in vier nicht gleich große Summanden (4+8+4+8), stutzte einen Moment und erhielt schließlich die Lösung, als er zwei Vierer zu einem Achter zusammenfasste.

Auch Patricia ging zunächst nicht von drei gleich großen Summanden aus, sondern zerlegte die 24 in vierzehn Summanden – drei Fünfen und neun Einsen. Dann strich sie die ersten drei Einsen durch und notierte sie jeweils unter den drei Fünfen. Die restlichen Einsen verteilte sie schrittweise analog und fasste zum Schluss eine 5 sowie drei Einsen jeweils zu einer 8 zusammen.

Drei Kinder lösten die „Bonbonaufgabe" durch Subtraktion nicht unbedingt gleich großer Zahlen (vgl. Abb. 5). So zog Nina relativ zielsicher sechsmal die 4 ab.

Angela hingegen gab nach kurzem Überlegen die Antwort, dass sie neun Bonbons übrig behielte. Auf Rückfrage erklärte sie, sie habe von 20 dreimal die 5 subtrahiert, so dass zusammen mit den vier Bonbons, die sie noch nicht berücksichtigt habe, ein Rest von insgesamt neun Bonbons bliebe. Nachdem sie gefragt wurde, ob man diese nicht auch noch verteilen könne, rechnete sie die drei restlichen Aufgaben aus (9−3=6; 6−3=3 sowie 3−3=0), so dass letztendlich jedem Kind acht Bonbons zukamen (Drei Kinder acht Stück.).

Marc-André schließlich subtrahierte dreimal die 4 sowie sechsmal die 2. Um die Lösung anzugeben addierte er dann die 4 und die 4 (2+2) Bonbons, die jedem Kind gehörten.

Lösungen durch Zählen mit Hilfe vo Zeichnungen

Vier Kinder erhielten das richtige Resultat zählend, entweder während sie zeichneten oder im Anschluss daran (vgl. Abb. 6). Nadine malte für das erste (rechts), das zweite (unten) und das dritte Kind (oben) jeweils ein Bonbon hin. Dabei zählte sie von 1 bis 3. Dann

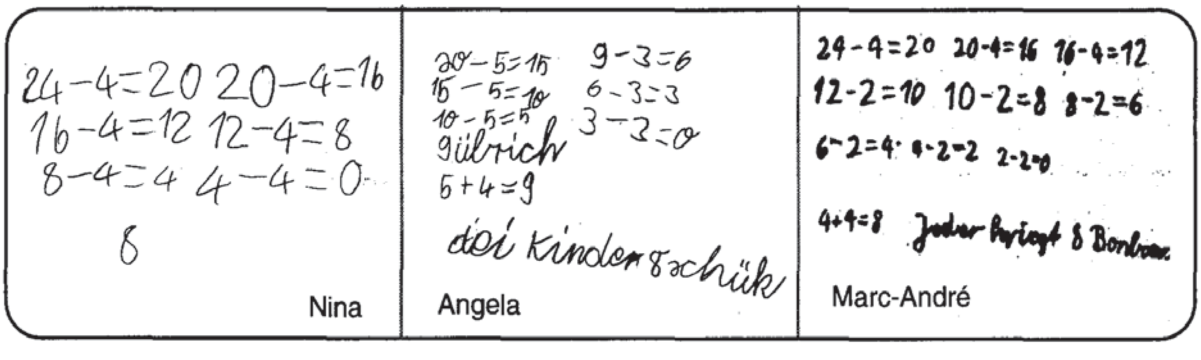


Abb. 5: Lösungen durch Subtraktion

zeichnete sie analog für jedes Kind ein weiteres oberhalb des zuerst gemalten und zählte von 4 bis 6. Dieses Verfahren setzte sie bis 24 fort und ermittelte zum Abschluss die gesuchte Anzahl (Jedes Kind hat 8).

Sven stellte zuerst 24 Kreise im „Rechtecksmuster" dar, strich jeweils ein Bonbon durch, malte es abwechselnd in die linke, die mittlere sowie die rechte Säule und zählte sodann die jeweilige Anzahl ab.

Jennifer malte – jeweils in Dreierschritten zählend – 24 Bonbons und merkte sich parallel dazu, wie viele Dreiergruppen sie aufgezeichnet hatte.

Martin schließlich malte drei Kreise und markierte durch einen kleinen Strich auf jeder der Kreislinien, dass er jedem Kind ein Bonbon geben würde. Dann zählte er rückwärts von 24 bis 21 und merkte sich durch die Notation der 21, wie viele Bonbons verblieben waren. Dieses Verfahren wiederholte er mehrfach, wobei er jeweils die alte Merkzahl durchstrich, bevor er die neue danebenschrieb. So gelangte er auf der Kreislinie einmal „rundherum" sowie in der „Merkzeile" in Dreierschritten rückwärts von der 21 bis zur 3. Beim letzten Schritt verzählte er sich zwar, bemerkte dies jedoch umgehend und ersetzte die bereits vermerkte 1 durch eine 0. Abschließend zählte er die Anzahl der Striche auf jeder Kreislinie ab und schrieb als Lösung eine 8 zwischen Zeichnung und Merkzeile. Unterhalb der ursprünglichen ist eine identisch angelegte Zeichnung zu erkennen, weil Martin abschließend gebeten wurde, sein Verfahren noch einmal kurz zu erklären, was er allerdings zum Anlass nahm, es noch einmal ausführlich darzulegen.

Fehlerhafte Bearbeitungen

Fünf Bearbeitungen wiesen Fehler beim Rechnen, beim Abzählen oder beim Aufgabenverständnis auf (vgl. Abb. 7): Daniela malte zunächst 24 Kreise, kringelte dann jeweils Sechsergruppen ein und sagte, jedes der vier Kinder bekäme sechs Bonbons. Auf Nachfrage erklärte sie, dass sie jedoch nicht wisse, wie sie die Verteilung für drei Kinder durchführen solle. Das Ergebnis des abschließend notierten Zahlensatzes 3+5 lautete zwar 8, doch konnte Daniela keinen *erkennbaren* Bezug zur ursprünglichen Aufgabenstellung angeben.

Achim begann, indem er jedem Kind drei Bonbons gab, was er durch den Zahlensatz 3–3–3 ausdrückte, den er jedoch als unpassend verwarf und einklammerte. Daraufhin teilte er jedem Kind fünf Bonbons zu, beging dabei jedoch den Fehler eine 5 zu vergessen: Er zählte nämlich von 24 ausgehend um 5 rückwärts und notierte den Zahlensatz 24–5. Dann zählte weiter rückwärts bis zur 14 und „protokollierte" dies, indem er seine schriftlichen Aufzeichnungen fortführte (24–5–5). Dabei hatte er die 14 durch die vier abgespreizten Finger

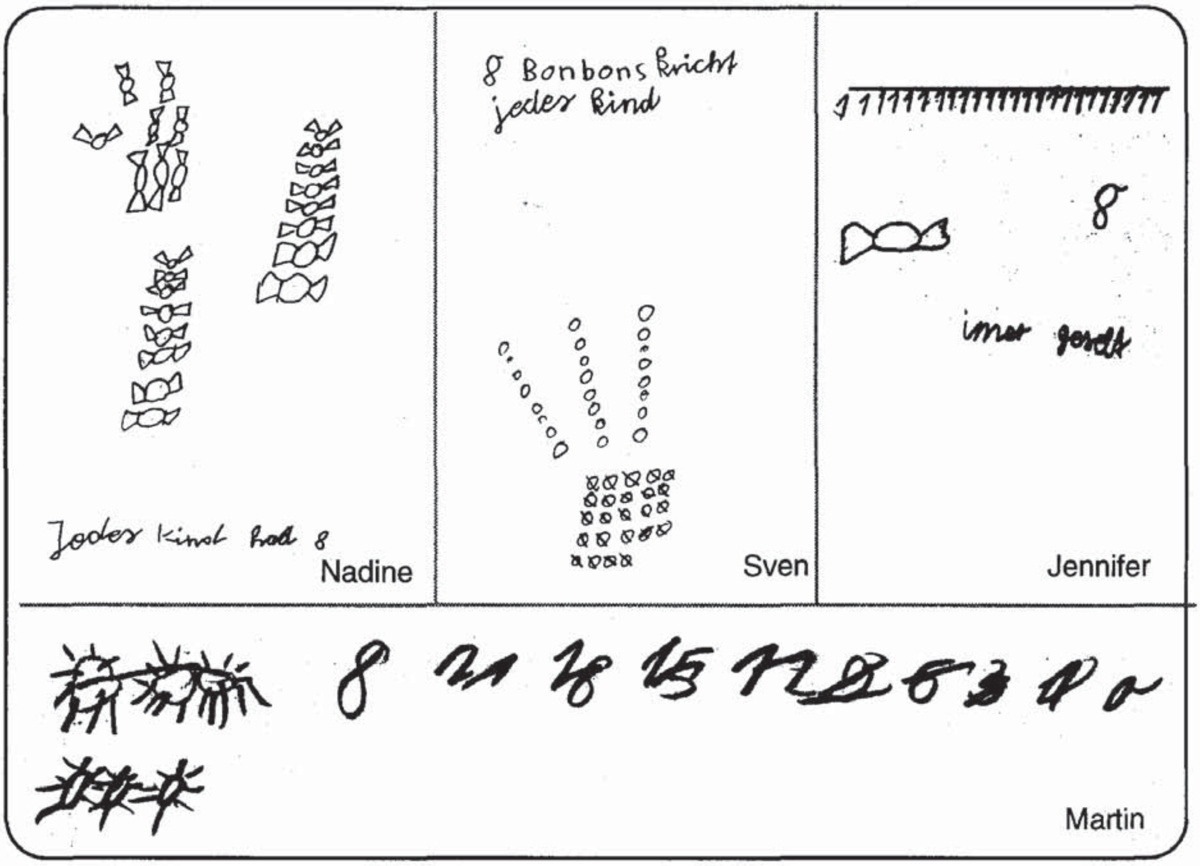


Abb. 6: Lösungen mit Hilfe von Zeichnungen

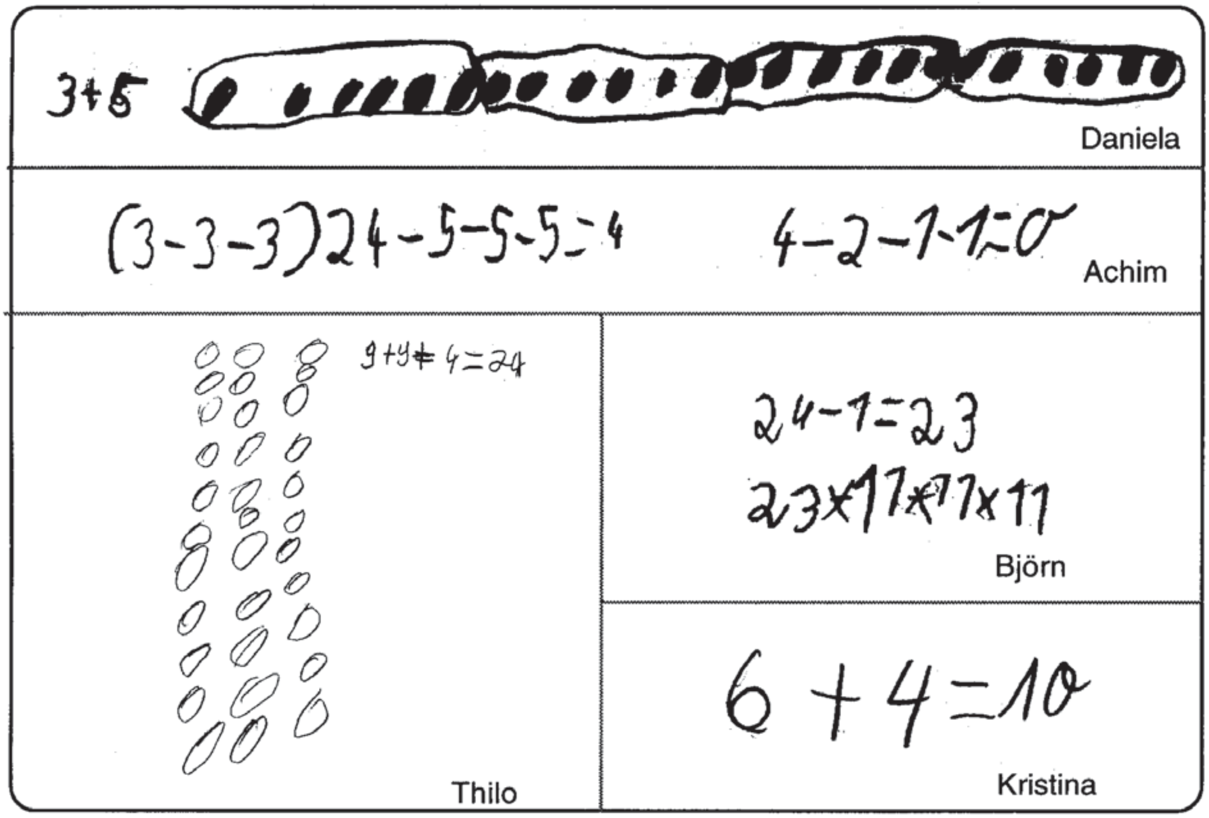


Abb. 7: Fehlerhafte Bearbeitungen

der linken Hand repräsentiert. Allerdings vergaß er beim Niederschreiben, dass er bei 14 angelangt war, und nahm die genauso zu merkende 9 als Ausgangspunkt des nächsten Zählprozesses. Folgerichtig vollendete er den Zahlensatz 24–5–5–5=4. Die restlichen vier Bonbons verteilte er – so gerecht wie möglich – an die drei Personen und gab die zugehörige Differenz mit 4–2–1–1=0 an. Ein Kind, so Achim, bekäme somit sieben, die beiden anderen jeweils sechs Bonbons.

Thilo malte zunächst elf Dreierreihen; jede Spalte sollte dabei ein Kind repräsentieren. Durch Abzählen ermittelte er, dass er ausreichend viele Objekte gezeichnet hatte. Im Weiteren verlor er jedoch – wahrscheinlich – den Bezug zu seiner Zeichnung und teilte dem ersten Kind neun Bonbons zu. Für das zweite Kind sah er ebenfalls neun Bonbons vor, verzählte sich jedoch und gelangte zum Zwischenergebnis 19, das er eigentlich notieren wollte – man erkennt ein Gleichheitszeichen hinter dem Ausdruck 9+9. Für das dritte Kind würden dann noch – erneuter Zählfehler – vier Bonbons übrig bleiben, was Thilo durch die Vervollständigung des Zahlensatzes kenntlich machte. Die Frage, ob es sich hierbei um eine gerechte Verteilung handelte, verneinte er, gab aber andererseits zu verstehen, dass er die Aufgabe nicht besser zu lösen vermochte. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass Thilo bei der Verwendung von Zählobjekten eine korrekte Lösung erhalten hätte. Aus den eingangs genannten Gründen wurde allerdings im Rahmen dieser Standortbestimmung – natürlich nicht im Unterricht – auf deren Einsatz verzichtet.

Björn gab eingangs an, jede Person erhielte zwölf Bonbons, wenn es zwei Kinder wären. Bei drei Kindern hingegen sei es dann jeweils ein Bonbon weniger. Er notierte die Gleichung 24–1=23 und sagte, jedes Kind bekomme elf Bonbons, was er durch den Zahlensatz 23x11x11x11 ausdrückte. Er meinte damit allerdings die Gleichung 23=11+11+11.

Bei Kristina, die allerdings aufgrund von Sprachproblemen den Kontext nicht verstanden zu haben schien, konnte auch durch detailliertes Nachfragen nicht geklärt werden, was sie zur Notation des Zahlensatzes 6+4=10 veranlasst hatte.

Fazit

■ Analysiert man die insgesamt 21 Bearbeitungen, so bleibt erstens festzuhalten, dass insgesamt 16 Schüler – also etwa drei Viertel – die Bonbonaufgabe „korrekt" lösten. Dieser Prozentsatz war im Übrigen bei den anderen Aufgaben der Standortbestimmung ähnlich hoch. Dieses Ergebnis sollte jedoch auch immer vor dem Hintergrund gesehen werden, dass die Schüler in der Regel eben nicht multiplizierten oder dividierten, so wie wir es verstehen, sondern eigene Strategien zur Anwendung brachten, die häufig die Keime für effizienteres multiplikatives Rechnen in sich trugen.

- Es ließen sich zweitens nicht weniger als 19 verschiedene Rechenwege feststellen – lediglich die Bearbeitungen von René und Benni sowie von Manuela und Sascha erscheinen uns gleich. Dabei sind Aussagen über die Denkwege der Schüler stets mit einer gewissen Vorsicht zu treffen, da man nie – auch mit der ausgefeiltesten Methodik nicht – mit letzter Sicherheit wissen kann, ob die Auskünfte der Kinder über ihr eigenes Denken deren Gedankenwelt authentisch abbilden oder vielleicht nicht auch im Nachhinein konstruierte Aussagen sind, um die (vermuteten) Erwartungen des Interviewers zu erfüllen.
- Außerdem möchten wir drittens konstatieren, dass auch bei „falschen Lösungen" – etwa bei Achim oder Daniela – durchaus ein rationaler Kern sowie ein Grundverständnis der Division festzustellen waren.
- Es wurde schließlich viertens deutlich, dass keineswegs alle Schüler bei der Bonbonaufgabe verteilnah rechneten – also drei gleich mächtige Teilmengen bildeten und überprüften, ob deren „Summe" 24 ergab: In Reinform gingen beispielsweise Simone oder Oliver so vor. Daneben konnte beobachtet werden, dass einige Schüler nicht direkt die Gesamtmenge in drei Teilmengen aufsplitteten, sondern Teilmengen davon, etwa Nina oder Angela. Das aufteilnahe Rechnen – also das Bilden von Teilmengen der Mächtigkeit 3 und die Ermittlung von deren Anzahl – nutzte beispielsweise Jennifer. Wir wollen die Denkwege der Schüler im Einzelnen nicht weiter klassifizieren, sondern lediglich festhalten, dass das Denken dieser 21 Schüler sich zwar in oberflächlicher Weise strukturieren lässt, jedoch viel zu komplex ist, um solche Zuordnungen jeweils eindeutig vornehmen zu können.

3.3 Zum Umgang mit „unlösbaren" Textaufgaben

Zu Beginn der achtziger Jahre wurde französischen Zweit- und Drittklässlern die Aufgabe gestellt: „Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?" Von insgesamt 97 Kindern haben 76 die im Text genannten Zahlenwerte miteinander kombiniert und sind auf diesem Wege in der Regel zu dem Ergebnis gekommen, der Kapitän müsse 36 Jahre alt sein.

Achtzig Prozent der Schüler hatten also eine unlösbare Aufgabe durch die Verknüpfung irrelevanter Daten gelöst. Die französischen Forscher haben, „ermutigt durch diese Erfolge", sieben- bis elfjährigen Kindern eine ganze Reihe vergleichbarer Aufgaben vorgelegt. Die Resultate waren kaum anders: So ließen sie etwa Tiere vom Schiff fallen, was die Kinder dazu veranlasste zu subtrahieren, oder sie verwendeten eine große und eine kleine Zahl, was zur Folge hatte, dass die Schüler dividierten (vgl. Baruk 1989).

Als diese Ergebnisse einmal im Rahmen eines Schulpraktikums diskutiert wurden, waren Studierende wie Lehrende fest davon überzeugt, dass vergleichbar niederschmetternde Resultate bei den eigenen Schülern nicht zu beobachten sein würden. Zu aufgeweckt erschienen die insgesamt 20 Kinder, und „normale" Drittklässler, so die feste Überzeugung, würden auf diesen Aufgabentyp niemals „hereinfallen". Um die Richtigkeit dieser Annahme zu überprüfen bekamen die Schüler dann jeweils in Zweiergruppen die folgenden sechs Aufgaben gestellt (vgl. Selter 1994a):

1. Michael ist 8 Jahre alt. Seine Mutter ist 26 Jahre älter als Michael. Wie alt ist sie?
2. Anke ist 12 Jahre alt. Ankes Mutter ist dreimal so alt. Wie alt ist die Mutter?
3. Ein Hirte hat 19 Schafe und 13 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?
4. Ein 27 Jahre alter Hirte hat 25 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?
5. In einer Klasse sind 13 Jungen und 15 Mädchen. Wie alt ist die Lehrerin?
6. Ein Bienenzüchter hat 5 Bienenkörbe mit jeweils 80 Bienen. Wie alt ist der Bienenzüchter?

Die gespannte Erwartung zu Beginn der Interviews, ob überhaupt ein einziger Schüler durch die Aufgaben getäuscht werden würde, wich während deren Verlauf mehr und mehr dem blanken Entsetzen: Denn *sämtliche* Schüler lösten jeweils *alle* sechs Aufgaben, indem sie die angegebenen Zahlen irgendwie zueinander in Beziehung setzten. Sogar bei der vierten Aufgabe, aus deren Wortlaut das Alter des Hirten doch ganz offensichtlich hervorging, hatten die Kinder gerechnet.

Zwei Interviews waren mit der Videokamera dokumentiert worden. Das Studium dieser Aufzeichnungen verstärkte den Eindruck, dass die Kinder vollkommen mechanisch vorgingen und ihren gesunden Menschenverstand komplett ausblendeten.

Sebastian (S) und Dennis (D) beispielsweise hatten die ersten drei Aufgaben relativ schnell bearbeitet. Anhand eines längeren Transkriptausschnittes wollen wir nun dokumentieren, wie sie bei der vierten Aufgabe vorgingen. Die in den Kommentaren geäußerten Bemerkungen über die Gedanken der Interviewerin (I) basieren auf nachträglich durchgeführten Befragungen.

---

1 I: *Habt ihr beide was? ... Und mal die Rechnung? Sagst du's mal, Sebastian? Was hast du gerechnet?*
2 S: **27 plus 25 plus 10.**
3 I: *Und du?* (zu Dennis)
4 D: **Ich hab 27 minus, äh, plus 25, minus 10.**
5 I: *Minus 10?* (erstaunt)
6 D: **Ja!**
7 I: *Das musst du mir jetzt mal erklären.*
8 D: **Ich hab einfach nur so gedacht.**
9 I: *Ach, hättest du jetzt auch minus 27 schreiben können?*
10 D: **Ne!**
11 I: *Warum nicht?*
12 D: **Ja, weil das ja, das geht nicht, weil das ja hier 25 sind, da kann man nicht minus 27 rechnen.**
13 I: *Mhm, und deshalb hast du jetzt minus 10 gerechnet?*
14 D: **Ja!**

Die Interviewerin bittet zunächst beide Kinder ihre Ergebnisse vorzulesen. Dass Sebastian alle drei vorkommenden Zahlen addiert, erstaunt sie nicht in besonderem Maße. Schließlich hatten beide Schüler bei der vorangehenden Aufgabe die Tatsache, dass sie die 19 und die 13 addierten, wie folgt gerechtfertigt: „Wir haben die Schafe und die Ziegen zusammengerechnet, und dann wussten wir, wie alt der Hirte ist."

Als dann jedoch Dennis (in 4) seinen Rechenweg kundtut (27+25−10), artikuliert die Interviewerin ihr Erstaunen und bittet ihn, diesen zu erläutern. Dennis' Kommentar (8) versteht sie so, dass er die Zahlen in einer beliebigen Weise miteinander verknüpft hat. Diese Interpretation versucht sie im Folgenden zu erhärten. So fragt sie ihn, ob er denn auch „minus 27" hätte rechnen können. Er verneint, da er dann 27 von 25 hätte abziehen müssen. Die Vermutung der Interviewerin, dass er aus diesem Grund die 10 subtrahiert habe, bestätigt er (14), wobei allerdings nicht deutlich wird, warum er überhaupt subtrahierte. Die Interviewerin geht auf dieses Problem im Weiteren zunächst nicht ein.

---

15 I: *Wenn du dir die Aufgabe einmal durchliest. Lies mir noch mal den ersten Teil vor.*
16 D: **Ein 27 Jahre alter Hirte.**
17 I: *Und du?* (zu Sebastian)
18 S: **Ein 27 Jahre alter Hirte.**
19 I: *Und wie heißt die Frage, ganz kurz noch? Lies mal die Frage vor!*
20 S: **25 Schafe.**
21 I: *Ne, hier fängt die an!*
22 S: **Wie alt ist der Hirte?**
23 I: *Fällt euch da was auf? ... Denkt noch mal an den ersten Teil!*

Die Interviewerin ist geradezu geschockt, dass die Schüler selbst bei dieser Aufgabe die Zahlen mechanisch abarbeiten und nicht beachten, dass die Information über das Alter des Hirten doch eigentlich dem Text direkt zu entnehmen ist. Sie versucht die Kinder auf diesen Widerspruch hinzuweisen und einen kognitiven Konflikt zu erzeugen. Beide Schüler werden gebeten, den ersten Teilsatz vorzulesen. Sebastian wiederholt zusätzlich noch die Fragestellung. Die Interviewerin möchte „überflüssige" Informationen ausblenden, damit die Schüler sich auf das Wesentliche konzentrieren können. Darüber hinaus versucht sie den Zusammenhang zwischen Frage und gegebener Information ganz explizit herzustellen (23). Sebastian und Dennis scheinen dafür jedoch nicht sensibel zu sein.

---

24 S: **Mh, ich weiß es. Ein 27 Jahre alter Hirte, da muss man die 25 noch dazuzählen, und die 10 Ziegen, die laufen ja nicht weg!**
25 I: *Die laufen nicht weg?*
26 S: **Ne, hab ich ja geschrieben!**
27 I: *Und was musst du da rechnen?*
28 S: **27 plus 25 plus die 10.**
29 I: *Weil die Ziegen nicht weglaufen?*
30 S: **Ja.**

Die beiden Schüler empfinden keine Diskrepanz zwischen ihrer jeweiligen Lösung und dem ersten Teil des Aufgabentextes, sondern lediglich zwischen ihren unterschiedlichen Antworten: Zunächst rechtfertigt Sebastian seinen Rechenweg, alle drei Zahlen zu addieren, damit, dass die Ziegen nicht weglaufen würden. Aller Wahrscheinlichkeit nach haben hier diejenigen Schulbuchdarstellungen einen Einfluss gehabt, in denen die Subtraktion durch das Sichentfernen von Personen aus einer Gruppe repräsentiert wird.

Die überraschte Äußerung der Interviewerin (25), die Sebastians Erklärung zu hinterfragen versucht, wird von ihm beantwortet, wobei er allerdings Ursache und Wirkung vertauscht (26): Nun erscheint die Tatsache, dass er eine Plusaufgabe notiert hat, die Begründung dafür zu liefern, dass die Ziegen nicht weglaufen. Sebastian ist sich vermutlich gar nicht bewusst, warum die Interviewerin so gezielt nachfragt. Somit rechtfertigt er – wohl im Nachhinein – die Durchführung von Rechenoperationen, was er im Unterricht normalerweise nicht tun muss. Die Interviewerin greift Sebastians Erklärung geschickt auf und bittet Dennis um eine Stellungnahme (31).

---

31 I: *Und was meinst du?* (zu Dennis)
32 D: **Die laufen weg! (lächelnd)**
33 I: *Bei dir laufen sie weg, ne! ...*
34 D: **Der passt da nicht drauf auf!**

Die Interviewerin erhofft sich eigentlich, dass Dennis Sebastians Begründung als nicht stichhaltig ansieht und dass dadurch ein neues Nachdenken über die Angemessenheit der verwendeten Rechenoperationen in Gang kommt. Dennis modifiziert allerdings Sebastians Argument so, dass es mit seinem Rechenweg kompatibel wird (32). Die eher scherzhaft gemeinte Äußerung (34), die von allen Beteiligten mit einem fast schon befreienden Lachen begleitet wird, deutet möglicherweise an, dass die Schüler ein Stück weit auch die Absurdität der Aufgabe erahnen. Die Interviewerin versucht dann erneut dem Gespräch eine andere Richtung zu geben.

---

35 I: *Ja, das stimmt* (schmunzelnd). *Pass auf, jetzt machen wir das noch einmal. ... Liest du mal hier die Frage vor, Sebastian?*
36 S: **Wie alt ist der Hirte?**
37 I: *Liest du den ersten Teil mal vor?* (zu Dennis; deckt mit Ausnahme der ersten Worte den Text mit der Hand ab)
38 D: **Ein 27 Jahre alter Hirte.**
39 I: *Fällt euch da gar nichts auf, sonst, wenn man die Schafe und die Ziegen einfach mal weglässt? ... Was heißt das denn bis hierhin, dieser Satz?*
40 D: **Dass der Hirte 27 alt ist.**
41 I: *Und wie heißt die Frage?*
42 D: **Hier die?**
43 I: *Da ist die Frage.*
44 D: **Wie alt ist der Hirte? Das ist vielleicht gelogen?**

Zunächst stimmt die Interviewerin Dennis' Äußerung, der Hirte passe nicht auf, schmunzelnd zu. Dann jedoch will sie die Schüler erneut für die Widersprüche sensibilisieren, die für sie selbst offenkundig sind. Noch massiver als in den Äußerungen 15 bis 23 steuert sie auf die Diskrepanz zwischen dem ersten Textteil und der Fragestellung zu. Dabei deckt sie sogar Teile des Textes mit der Hand ab.

Da die Schüler allerdings auf die Frage, ob ihnen gar nichts auffalle (39), mit Schweigen reagieren, präzisiert sie ihr Anliegen, indem sie die Frage noch weiter einschränkt und den Schülern die Antwort gewissermaßen in den Mund legt. Dennis verbalisiert dann (40), dass der Hirte 27 Jahre alt sei, und äußert nach erneutem Nachfragen der Interviewerin, dass es vielleicht gelogen sei (44).

Das Wort „vielleicht" spiegelt jedoch seine Unsicherheit wider; schließlich, so kann man seine Gedanken deuten, habe er es ja ausgerechnet. Jedoch muss unklar bleiben, ob Dennis wirklich meinte, dass das angegebene Alter vielleicht nicht der Wahrheit entsprach, oder ob er eventuell die bisher angestellten Rechnungen mit den Ergebnissen 42 und 62 und damit die gesamte Aufgabenkonstruktion in Frage stellte.

---

45 I: *Das ist vielleicht gelogen.*
46 S: **Der ist vielleicht 27 Jahre.**
47 I: *Und wie kommst du jetzt darauf?*
48 S: **Vielleicht zählt der Satz nicht mit!**
49 I: *Mhm* (zustimmend) *... Was meinst du, Dennis?*
50 D: **Vielleicht zählt der Satz doch mit, oder auch nicht. Weiß ja nicht.**

Die Interviewerin hofft nicht nur Dennis auf seinem Denkweg zu bestärken, sondern strebt auch an, Sebastian dafür zu sensibilisieren. Dieser lässt sich darauf ein und sagt: „Der ist vielleicht 27 Jahre." Die Interviewerin fragt ihn nach einer Begründung (47), die Sebastian darin sieht, dass der mittlere Teil der Aufgabenstellung vielleicht nicht mitzähle.

Sie versucht diese – so scheint ihr – tiefer gehende Einsicht Dennis zurückzuspiegeln. Damit erhofft sie sich, dass dieser wirklich – also nicht nur auf der Ebene der Worte – verstehe, dass der Satz nicht mitzähle. Seine Reaktion (50) zeigt jedoch, dass er diese Einsicht noch nicht erworben hat. Daher verstärkt die Interviewerin Sebastians Äußerung nochmals (51).

---

51 I: *Aber das ist schon gar nicht schlecht, was der Sebastian gesagt hat ... Was würdest du dann für eine Antwort schreiben? Wenn du jetzt antworten müsstest „Wie alt ist der Hirte"?*
52 S: **27.**
53 I: *Und warum jetzt 27?*
54 S: **Weil vielleicht der erste Satz nicht mitzählt.**
55 I: *Ja, und in dem ersten Satz, was steht da drin?*
56 S: **Ein 27 Jahre alter Hirte ...**
57 I: *Ja, und was ist das?*
58 S: **... hat 25 Schafe.**
59 I: *Ja, das ist aber die Antwort dann schon auf die Frage, ne?*
60 S: **Der Satz zählt nicht mit!**

Die Interviewerin fragt Sebastian nochmals nach seiner Antwort und bittet ihn diese zu begründen. Trotzdem ist er sich immer noch nicht sicher, was durch sein Verhalten im Videodokument genauso deutlich wird wie durch den Zusatz „vielleicht" (54). Die Interviewerin möchte nun explizit hören, die Antwort sei schon im ersten Teil des Textes enthalten. Sie stellt daher noch gezieltere Fragen, deren zugehörige Antworten zwar aus ihrer eigenen Sicht evident sind, aus der Perspektive der Schüler jedoch schwer verständlich erscheinen: „Was steht da drin?" (55) bzw. „Ja, und was ist das?" (57).

Da Sebastian verständlicherweise ihre Fragen nicht so versteht, wie die Interviewerin intendiert, gibt sie zum Schluss die Antwort selbst (59). Sebastian vertritt die Aussage, der mittlere Teil zähle nicht mit, nun offensiver (60). Die Interviewerin bestärkt ihn darin und wendet sich erneut an Dennis (61).

---

61 I: *Genau, der zählt nicht mit. Ist gar nicht so schwer, da brauchte man gar nicht bei zu rechnen, bei dieser Aufgabe, wenn man sich das gut durchgelesen hat ... Hast du's auch verstanden?* (zu Dennis)

62 D: **Ne!**

63 I: *Kannst du ihm das noch mal erklären?*

64 S: **Der Satz zählt nicht mit, Dennis.**

65 I: *Lies dir das noch mal so durch, den ersten Teil, bis hierhin, den du gerade so vorgelesen hast!*

66 D: **Ein 27 Jahre alter Hirte.**

67 I: *Was heißt das?*

68 D: **Ja, dass er halt 27 Jahre alt ist.**

69 I: *Ja, und die Frage ist: „Wie alt ist der Hirte?" Hast du es verstanden?*

70 D: **Ja, aber das steht ja da oben schon.**

71 I: *Ja, und steht nur noch dabei, dass der Hirte 25 Schafe und 10 Ziegen hat. Die kann er doch trotzdem haben, auch wenn er 27 Jahre alt ist, oder nicht?*

72 D: (zuckt mit den Schultern)

73 I: *Weißt du nicht?*

74 D: **Ne!**

Auf die Frage, ob er es denn verstanden habe, antwortet Dennis (62) mit einem ehrlichen „Ne!", woraufhin die Interviewerin Sebastian um Erklärungen bittet. Dieser gibt jedoch lediglich die Antwort, der mittlere Teil des Aufgabentextes zähle nicht mit (64), so dass die Interviewerin das Gefühl hat unterstützend eingreifen zu müssen.

Sie regt Dennis zunächst an den ersten Teil des Textes zu lesen und dessen Inhalt sinngemäß zu deuten (67). Als Dennis die erwartete Antwort gibt, stellt sie die Verbindung zur Fragestellung selbst her (69). Dennis bestätigt die Deutung der Interviewerin (70). Diese versucht dann erneut auf die Irrelevanz des Mittelteils hinzuweisen (71), verwirrt Dennis damit jedoch (72).

Letztendlich blieb zumindest bei Dennis, vielleicht auch Sebastian ein gerüttelt Maß an Unsicherheit bezüglich des Sinngehalts dieser Aufgabenstellung. Wie sich im weiteren Verlauf des Interviews zeigte, schienen die beiden Schüler die „Sinnlosigkeit" dieser und der anderen Kapitänsaufgaben nicht erkannt zu haben. Im Gegenteil kann man vermuten, dass Dennis und Sebastian bereit (oder gezwungen) waren, sich formal auf die Gedankengänge der Interviewerin einzulassen, inhaltlich jedoch stark verunsichert wurden.

Eigentlich handelt es sich bei dieser Episode nicht um ein klinisches Interview in der Reinform, bei dem das geistige Abhorchen, der Wille, mehr über das Denken der Kinder zu erfahren ohne sie dabei zu beeinflussen, die zentrale Zielsetzung darstellt (vgl. Kap. 5.1). Die Studentin, der man überhaupt keinen Vorwurf machen kann, da sie keine trainierte Interviewerin war, sondern sich im Rahmen des Praktikums erstmalig mit den Grundzügen dieser Methode vertraut gemacht hatte, identifizierte sich stark mit dem Geschehen: Sie wollte Sebastian und Dennis keineswegs entlassen, ohne dass diese vorher die Unsinnigkeit der Aufgabenstellungen erkannt hätten, und hat die beiden somit ganz bewusst gelenkt. Dass sie dabei nicht unbedingt erfolgreich war, obwohl sie den Kindern die Antworten gewissermaßen in den Mund legte, ist ein weiterer Beleg dafür, dass ein Wissenstransfer vom Kopf des „Wissenden" in den Kopf des „Unwissenden" nicht erzwungen werden kann.

Die in den Interviews gewonnenen Eindrücke über das „geistlose Vorgehen" der Schüler wurden durch einen sich anschließenden Blick in die einschlägige Literatur bestätigt. In einer Untersuchung wurden beispielsweise neben berechenbaren auch einige nicht berechenbare Sachinformationen angeboten, wie etwa die folgende: „Katja verschickt zum Kindergeburtstag 8 Einladungen. Die Geburtstagsfeier findet in 4 Tagen statt" (Radatz 1983, 210). An dieser Erhebung nahmen insgesamt 333 Vorschulkinder bzw. Schüler der ersten fünf Schuljahre teil. Nur wenige Kindergartenkinder und Schulanfänger versuchten derartige Aufgaben zu berechnen. Kinder ohne lange Erfahrungen mit

Mathematikunterricht stellten in den weitaus meisten Fällen fest, dass man auf kein Ergebnis kommen könne. Kinder dieser Altersgruppe, so Radatz, konzentrierten sich auf die Sachen selbst (ebd., 214).

Eine prozentuale Aufschlüsselung der Berechnungsversuche bestätigt diese These: Während von den Kindergartenkindern bzw. den Erstklässlern nur etwa 10% der Kapitänsaufgaben „gelöst" wurden, lagen die entsprechenden Prozentsätze bei den Schülern des zweiten Schuljahres (etwa 30%) sowie der dritten bzw. vierten Klasse (etwa 60%) ungleich höher, um dann allerdings im fünften Schuljahr wiederum auf 45% abzusinken.

Radatz folgert daraus, dass die Einstellung der Schüler gegenüber eingekleideten Aufgaben ganz entscheidend durch den Unterricht geprägt würde. Außerdem bestätige sich die Erkenntnis, dass die Arithmetik und ihre Anwendungen von vielen Grundschülern als eine Art Spiel mit künstlicher Regelhaftigkeit und ohne besondere Beziehungshaltigkeit zur außerschulischen Lebenswirklichkeit angesehen würden. Dass bestimmte Lösungen mit der Realität oder inneren Bedingungen einer Aufgabe nicht vereinbar seien, werde von vielen Grundschülern nicht erkannt (ebd., 215f.). Sachaufgaben, so die Folgerung aus der Untersuchung, scheinen im Mathematikunterricht häufig unter Ausschaltung des Verstandes bzw. unter Nichtbeachtung des Kontextes schematisch gelöst zu werden.

Einige kritische Rückfragen erscheinen uns gleichwohl angebracht: Reflektieren die Schüler wirklich nicht über ihr „gedankenloses" Vorgehen? Stellt die Interviewsituation als solche nicht möglicherweise auch einen Grund für das merkwürdige Verhalten der Kinder dar (vgl. Kap. 5.1)? Was wäre, wenn man sich bemühte danach zu schauen, was die Kinder an vernünftigen Verhaltensweisen gezeigt haben, statt sich vorrangig an ihren Fehlern zu orientieren?

Auf Fragen wie diese finden sich einige Antworten in dem Buch „Wie Kinder denken" von Margaret Donaldson. Bei aller Wertschätzung für Piaget und dessen Lebenswerk sind ihrer Meinung nach eine ganze Reihe seiner Untersuchungsergebnisse anzuzweifeln. Aus den Experimenten seien häufig falsche Konsequenzen über die Kompetenzen der Kinder gezogen worden. Diese lägen z. T. deutlich höher, als das in den Versuchen gezeigte Verhalten vermuten lasse (Donaldson 1982, 64 f.).

Die Gründe für diese Diskrepanz sieht Donaldson erstens in einer Art „Forscher-Egozentrismus". Darunter versteht sie die fehlende Fähigkeit, sich von vorgefertigten Analyseschemata zu lösen. Äußerungen und Handlungen der Kinder würden dann bevorzugt vor diesem Hintergrund wahrgenommen und eingeordnet und anders geartete viel versprechende Ansätze würden nicht beachtet.

Donaldson zeigt zweitens auf, dass bei veränderten Aufgabenstellungen deutlich bessere Ergebnisse zu erzielen sind. Bei Piaget hätten die Kinder die Problemstellungen bisweilen gar nicht verstanden oder das Versuchsdesign sei als nicht unbedingt kindgerecht zu bezeichnen gewesen.

Außerdem waren drittens die Resultate der Versuche häufig dadurch negativ beeinflusst, dass sie im sozialen Kontext des „Experiments" erhoben worden seien: Die Kinder konzentrierten sich nicht nur auf die Aufgabenstellung, sondern machten sich auch Gedanken über die Interviewsituation als solche. Fragen, die sie dabei vorrangig beschäftigten, waren beispielsweise: „Was will der Erwachsene von mir?", „Warum fragt er mich so etwas?" oder „Was passiert, wenn ich eine falsche Antwort gebe?" (vgl. Hundeide 1988).

Nun hat es sich bei den Interviews, die die Studierenden im Rahmen des Schulpraktikums führten, nicht um Forschung im eigentlichen Sinne gehandelt. Gleichwohl scheinen die von Margaret Donaldson aufgezählten Punkte auch hier von einer gewissen Relevanz zu sein.

Daher wurden die Videoaufzeichnungen und die Transkripte der Interviews nochmals einer genaueren Analyse unterzogen. Dabei ließen sich bei den Schülern durchaus Elemente des Zweifels oder des Unbehagens feststellen. Dass diese nicht auf Anhieb erkannt worden waren, lag zweifelsohne am „Forscher-Egozentrismus", der sich relativierte, wenn man die Dokumente mit einer optimistischeren Grundeinstellung – unter kompetenzorientiertem Blickwinkel – anschaute.

So brachte beispielsweise Sebastian bei der fünften Aufgabe („In einer Klasse sind 13 Jungen und 15 Mädchen") zum Ausdruck, dass man die Zahlenwerte nicht beliebig kombinieren könne, wenn man sie zum Kontext in Beziehung setzte.

1 S: **Hier muss man ja die 13 und die 15 zusammenrechnen.**
2 I: *Warum ziehst du die denn nicht ab? Warum rechnest du denn immer plus? Steht das da irgendwo, dass du plus rechnen musst?*
3 S: **Da ist ja die Lehrerin 2 Jahre alt.**
4 I: *Wenn du abziehen müsstest?*
5 S: **Ja.**
6 I: *Und das geht nicht?*
7 S: **Ja.**
8 I: *Hast du das aus dem gleichen Grund gemacht?*
9 D: **Da könnte sie höchstens Tiere unterrichten. Ameisen, oder so.**

Die von Sebastian und Dennis geäußerte Überzeugung, man könne nicht subtrahieren, änderte selbstverständlich nichts daran, dass beide Schüler das Alter der Lehrerin weiterhin additiv mit 28 ermittelten.

Ein zweites Beispiel: Bei Ramona und Stefan ließ sich – wie im Übrigen bei fast allen Kindern – eine gewisse Irritation feststellen, als sie die erste Kapitänsaufgabe lasen.

1 I: *So, jetzt haben wir schon die dritte Aufgabe.*
2 S: **Ein Hirte hat 19 Schafe und ...**
3 R: **13 Ziegen.**
4 S: **Ein Hirte hat 19 Schafe und 13 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?** (Stefan ist verunsichert.) **Hä?**
5 R: **Hä?**
6 S: **Ah, jetzt versteh ich.**
7 R: **Ich auch!**
8 S: **Die beiden zusammenzählen.**
9 R: **32.**
10 S: **Ja, 32.**
11 I: *Könnt ihr mir das mal erklären?*
12 S: **Anders geht's ja nicht.**
13 R: **Der muss ja schon 32 sein, wenn er so viele Tiere hat, da muss er ja schon 32 sein!**
14 S: **Aber das geht ja dann nicht, weil da ja kein Alter steht.**
15 I: *Mh* (zustimmend), *was geht nicht?*
16 S: **Das Alter! Wenn da kein Alter steht. Plus? Oder so? Erzähl du mal.** (zu Ramona)
17 R: **Ich versteh nicht, wie du das meinst.**
18 S: **Ich auch nicht.**

Ramona und Stefan wurden durch den Aufgabentext zunächst verunsichert, entschieden sich nach einer kurzen Phase der Irritation jedoch, die Zahlenwerte zu addieren. Auf die Rückfrage der Interviewerin (11) antwortete Stefan, dass es ja anders eigentlich nicht ginge (12). Er versuchte die Fragestellung und die Zahlenwerte irgendwie zueinander in Beziehung zu setzen. Ramonas Äußerung (13) spiegelt das gleiche Bemühen wider. Stefan merkte sodann nochmals an (14), man könne das Alter des Hirten eigentlich nicht berechnen, weil es nicht angegeben sei. Die Interviewerin verstärkte diese Äußerung und bat Stefan seine Erkenntnis zu präzisieren, verunsicherte ihn dadurch jedoch merklich (16). Da beide Schüler dann nicht wussten, was zu tun wäre (17 bzw. 18), ließen sie diese Aufgabe zunächst unbeantwortet. Im weiteren Verlauf des Interviews „lösten" sie jedoch sämtliche anderen Kapitänsaufgaben, kamen dann auf diese Aufgabenstellung zurück und berechneten das Alter des Hirten additiv mit 32.

Nicht nur eine solche kompetenzorientierte Sichtweise verhalf zu neuen Erkenntnissen über das Denken der Kinder, sondern auch Abwandlungen des Versuchsaufbaus. An mehreren Schulen wurden in der Folgezeit unterschiedliche Interviewdesigns erprobt.

Die Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen: Während Variationen in der Aufgabendarbietung (Zahlwörter statt Zahlsymbole, andere Kontexte, veränderte Reihenfolge der Aufgaben) keine allzu großen Auswirkungen zeigten, führte ein *veränderter didaktischer Kontrakt* zu spürbar anderen Resultaten.

Begann man das Interview nämlich beispielsweise mit dem Hinweis, dass einige der Aufgaben lösbar und andere nicht lösbar wären, so unternahmen deutlich weniger Schüler bei unlösbaren Aufgaben einen Berechnungsversuch (vgl. auch Stern 1992, 22). Diese sog. aufgeklärte Rahmenbedingung hatte den Vorteil, dass es den Kindern ermöglicht wurde, Unlösbarkeit zu konstatieren ohne an ihren eigenen Fähigkeiten zweifeln zu müssen.

Man kann nämlich durchaus davon ausgehen, dass die Schüler bei den zunächst durchgeführten Interviews dazu neigten, sämtliche Aufgaben zu berechnen – so irrelevant die angegebenen Daten auch erschienen –, da sie im Laufe ihrer schulischen Sozialisation gelernt hatten, dass im Mathematikunterricht jede Aufgabe eine eindeutig bestimmbare Lösung hat. Objektiv unlösbare Aufgaben gab es demnach nicht, sondern lediglich Problemstellungen, die der Einzelne aufgrund mangelnder Kompetenzen nicht bewältigen konnte. Das wird auch aus dem folgenden Transkriptausschnitt von Sebastian und Dennis deutlich.

1 I: *Jetzt möchte ich euch mal ein paar Aufgaben stellen, und ihr sollt mal Folgendes rausfinden: Einige von den Aufgaben, die kann man nicht ausrechnen, und da gibt's gar keine Lösung für, ne.*
2 S: **Doch** (bekräftigend)**. Für jede Aufgabe.**

3 D: **Mit Rest.**
4 I: *Für jede Aufgabe gibt's 'ne Lösung?*
5 S: **Ja.**
6 D: **Ja, mit Rest. Hinten dann den Rest hinschreiben.**
7 I: *Ja, aber hier sind einige bei, die kann man auch mit Rest nicht lösen.*
8 D: **Öh** (überrascht).
9 I: *Und einige kann man lösen.*
10 D: **Die sind so lang, ne?** (deutet die Spannweite seiner Arme an.)

So kann man festhalten, dass die ursprüngliche Vermutung, die Kinder würden bei der Beschäftigung mit Kapitänsaufgaben ihren „Verstand ausschalten", in dieser Absolutheit keineswegs zutraf. Natürlich ließen sich auch weiterhin Schülerinnen und Schüler beobachten, die die Zahlen (scheinbar) schematisch manipulierten.

Deren Anzahl nahm jedoch relativ gesehen ab. Einer ganzen Reihe von Schülern konnte man die Erleichterung anmerken, die Unlösbarkeit einer Aufgabe artikulieren zu können, ohne sie auf die eigene Inkompetenz zurückführen zu müssen. Es wurde deutlich, wie sehr die kleine Veränderung des didaktischen Kontraktes die Ergebnisse der Interviews beeinflussen konnte. Die defizitorientierte Sichtweise hatte sich als zu einseitig und zu einfach erwiesen. Die Schüler hatten sich nämlich auch deshalb merkwürdig verhalten, weil die ganze Situation, in der sie sich befanden, sie dazu veranlasste, und nicht, weil ihr Verstand grundsätzlich chloroformiert gewesen wäre.

Und selbst bei denjenigen Aufgaben, bei denen (aus Erwachsenensicht) irrelevante Daten miteinander verknüpft worden waren, ließ sich häufig ein rationaler Kern des scheinbar so irrationalen Handelns identifizieren, wenn man nur genau genug hinschaute. Den Kindern war klar, dass sie die Zahlenangaben eigentlich nicht miteinander verknüpfen konnten, um die Lösung zu erhalten. Andererseits, so ihre Überlegung, musste die Lösung irgendwo im Text versteckt sein (vgl. Freudenthal 1984).

Also versuchten die Kinder, die Aufgaben in einem anderen Bedeutungszusammenhang zu sehen, der es ihnen erlaubte, die Zahlenangaben mit der im Text entfalteten Situation in Verbindung zu bringen. Einige Beispiele derartiger, in der Regel hochkreativer Hilfskonstruktionen, die wir beobachten konnten, sollen im Folgenden angeführt werden:

- Der Hirte hat zu jedem Geburtstag ein Schaf oder eine Ziege geschenkt bekommen.
- Er hat sich für jedes Lebensjahr ein Tier gekauft; dann weiß er immer, wie alt er ist.
- Die Schulklasse ist eine besondere Klasse, weil in ihr genauso viele Kinder sind, wie die Lehrerin alt ist.
- Normal ist ein Mensch nicht 400 Jahre alt. Aber der Bienenzüchter heißt Ming, und der ist auf Mongor geboren. Hast du das gestern nicht im Fernsehen gesehen?

Das Erklärungsgrundmuster der Kinder bestand demnach darin, dass die Zahlen eben so gewählt worden seien, dass das Endergebnis Rückschlüsse darauf zuließ, wie alt die jeweilige Person sei. Dabei ergaben sich auch natürliche Grenzen. Sebastian und Dennis beispielsweise hatten das Resultat der Lehrerinnenaufgabe mit „28" angegeben, woraufhin sie gefragt wurden, wie diese wohl in der eigenen Klasse zu formulieren und zu berechnen sei.

---

1 S: **In einer Klasse sind ...**
2 D: **Ne, in unserer Klasse sind ...**
3 S: **Ja, in unserer Klasse sind 11 Jungen und 12 Mädchen. Wie alt ist die Lehrerin?**
4 I: *Und was wäre dann die Lösung?*
5 S: **23, ein bisschen jung für Frau Limmroth, ne?**
6 D: **Das hier, das zusammenzählen, die 13 und die 15.**
7 S: **Ach ne, die 11 und die 12.**
8 D: **Ah, ja.**
9 S: **23; ein bisschen jung, ne, für Frau Limmroth?**
10 D: **Ja, dann ist die auch unlösbar.**
11 I: *In eurer Klasse?*
12 D: **Aber in einer anderen nicht.**

Generell erwies es sich als ein entscheidender Gesichtspunkt, mit welchem Blickwinkel man an die Analyse des Geschehens heranging. Solange man nach irrationalem Vorgehen suchte, konnte es zuhauf wahrgenommen werden. Unterstellte man den Antworten und den Handlungsweisen der Kinder jedoch prinzipiell zuerst einmal einen rationalen Kern, so fiel auf, wie originell und – von einem anderen Standpunkt aus gedacht – vernünftig die Kinder häufig vorgingen. Ob dies allerdings registriert wurde, hing entscheidend davon ab, wie ihr Verhalten interpretiert wurde und welcher didaktische Kontrakt existierte.

3.4 Rechenwege bei der Addition dreistelliger Zahlen

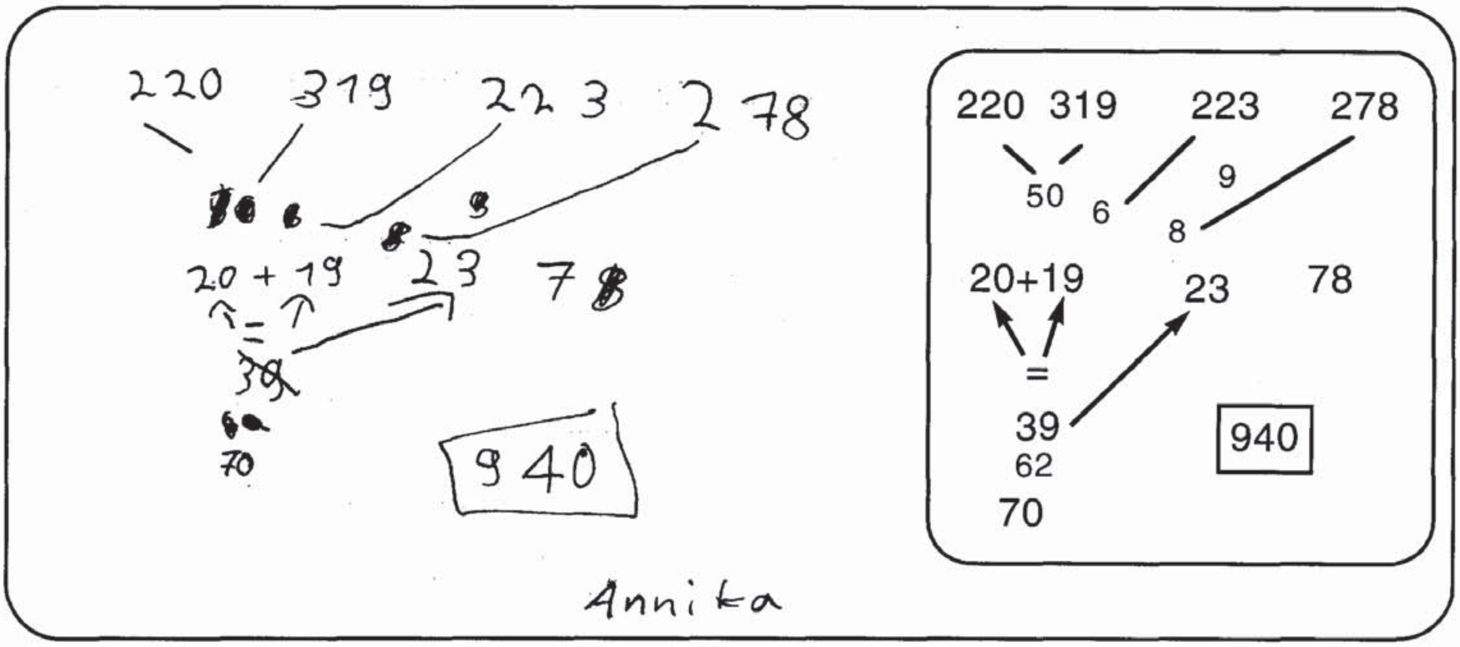
In diesem Abschnitt wollen wir ein weiteres Beispiel dafür geben, dass Kinder in der Lage sind, Aufgaben auf eigenen Wegen zu lösen, die uns Erwachsenen als (für sie) zu komplex und daher zu schwierig erscheinen.

Zu Beginn des 3. Schuljahres hatten die Bundesjugendspiele stattgefunden. Um die erzielte Gesamtpunktzahl zu ermitteln waren jeweils vier dreistellige Punktzahlen zu addieren. Da entstand die Idee, die Schüler ihre eigene Punktsumme selbst feststellen und ihre Vorgehensweise so dokumentieren zu lassen, dass eine andere Person hinterher erkennen konnte, was und wie sie gerechnet hatten (vgl. Spiegel 1993).

in der Regel begründet. Dies mag für manche Leserin zwar als unwissenschaftlich gelten. Doch man kann andererseits auch nicht leugnen, dass es sich hierbei um eine Methode handelt, die Lehrerinnen im Unterrichtsalltag häufig verwenden. Viele ihrer Entscheidungen basieren auf solchen Hypothesen über das Denken der Kinder.

Wir beginnen mit Annikas Eigenproduktion. Da teilweise schwer zu erkennen ist, welche Zahlen sie durchgestrichen hat, haben wir sämtliche von ihr notierten Zahlen in der rechten Hälfte von Abb. 8 nochmals aufgeführt.

Abb. 8:
Annikas Lösung



Dieser Kontext verdiente die Bezeichnung „Problem" im doppelten Sinne. Denn: Einerseits waren die Kinder begierig das Ergebnis zu erfahren, es war also ihr Problem. Andererseits gehörte es noch nicht zu ihrem Standardrepertoire, solche Anforderungen zu bewältigen, geschweige denn, den dazugehörigen Lösungsweg aufzuschreiben – es handelte sich also um ein echtes Problem und keine Routineaufgabe.

Zwar konnten die Schüler im Hunderterraum addieren. Somit war das Summieren dreistelliger Zahlen innerhalb ihrer Reichweite, aber sie hatten es zu diesem Zeitpunkt erst noch vor sich, den Tausenderraum als solchen systematisch zu erarbeiten (Notation, dezimale Strukturierung, Größenvorstellungen, Anordnung).

Im Folgenden haben wir acht besonders interessante Lösungen abgedruckt, die wir kommentieren. Da diese Eigenproduktionen im Rahmen des Unterrichts entstanden sind, können wir über die Vorgehensweisen der Schüler teilweise nur spekulieren – das allerdings

In der folgenden Übersicht haben wir versucht aufzuschreiben, wie Annika wahrscheinlich vorgegangen ist.

Geschrieben	Gerechnet
1. 50	200 + 300 = 500
2. 6 (50 durchgestrichen)	500 + 200 = 600
3. 8 (6 durchgestrichen)	600 + 200 = 800
4. 20 + 19 = 39 (Pfeile zur 20 und zur 19 sowie ein Gleichheitszeichen); außerdem 23 und 78	20 + 19 = 39
5. 62 (39 durchgestrichen)	39 + 23 = 62
6. 70 (die 8 der 78 durchgestrichen; 62 ebenso)	62 + 8 = 70;
7.	70 + 70 = 140
8. 9 (8 durchgestrichen)	800 + 100 = 900
9. 940 (9 durchgestrichen)	900 + 40 = 940

Annika berechnete also mit Ausnahme eines „Flüchtigkeitsfehlers" (500+200=600) alles richtig und löste das Darstellungsproblem mit viel Fantasie und Eigenständigkeit. Dabei ist erkennbar, wie sie sich bemühte, die Notation so zu wählen, dass eine andere Person ihren Rechenweg mitgehen konnte: Sie zog Striche von den vier Hunderterziffern nach unten, um die sukzessive Addition darzustellen. Außerdem notierte sie eine vollständige Gleichung, um die Addition der ersten beiden der verbliebenen zweistelligen Zahlen zum Ausdruck zu bringen. Dann ging sie zunehmend zu einer ökonomischeren Schreibweise über, die dann auch das Nachvollziehen ihrer Vorgehensweise etwas erschwert.

Ihr einziger Verstoß gegen gängige Konventionen besteht eigentlich darin, dass sie 50 statt 500 schrieb – wahrscheinlich, weil ihr nach dem Schreiben der ersten Null einfiel, dass diese eigentlich entbehrlich sei. Aber wer von uns benutzt nicht auch einmal „falsche" Schreibweisen bei entsprechenden Gelegenheiten? Annikas Dokument erscheint also nur auf den ersten Blick chaotisch, rätselhaft und undurchschaubar. Eine nähere Auseinandersetzung damit zeigt auf, dass weit mehr an vernünftigen Überlegungen aufgedeckt werden kann, als man zunächst vermutet.

Auch Brittas Zettel fällt durch eine originelle Darstellung auf (vgl. Abb. 9). Sie verminderte nach und nach den Schreibaufwand. Es lässt sich aber gut nachvollziehen, wie sie vermutlich gerechnet hat. Allerdings kann nicht immer mit Sicherheit gesagt werden, in welcher Reihenfolge sie es tat.

Zunächst summierte Britta die Hunderter (1300), dann schrittweise die zweistelligen Zahlen. Sie ging dabei wie folgt vor, vergaß allerdings am Ende, die beiden zu 100 zusammengefassten Fünfziger zu berücksichtigen: 50+50=100; 88+4=92; 92+42=134; 1300+134=1434; 1434+8=1442.

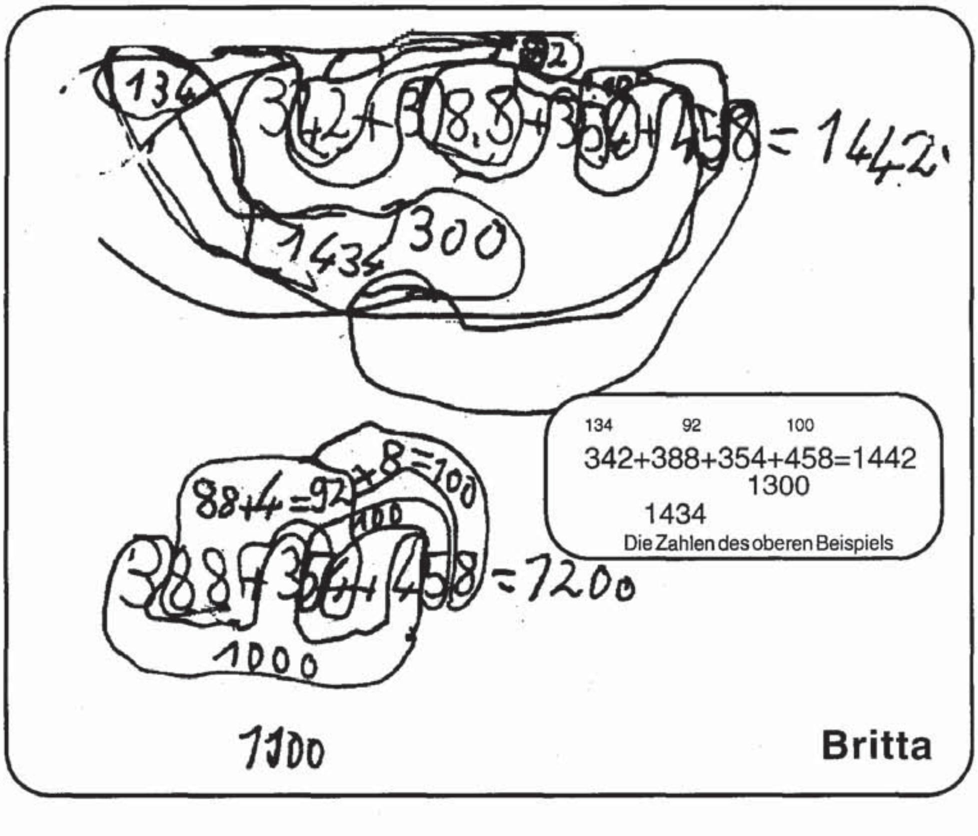
Die zweite Aufgabe, bei der die drei besten Punktzahlen zu summieren waren, löste sie korrekt, wobei sie allerdings (durchaus verständlich) gegen die Konventionen des Umgangs mit dem Gleichheitszeichen verstieß.

Andrea (vgl. Abb. 10) notierte zunächst einmal die vier zu addierenden Zahlen oben auf dem Blatt, die sie dann schrittweise durchstrich: 281, 372, 266, 432. Dann rechnete sie die Hunderterziffern der ersten beiden Zahlen zusammen (2+3=5) und zählte die gemischte Zehnerzahl des ersten Summanden hinzu (5+81=581). Allerdings brach sie dann ihre Rechnung ab, vielleicht weil ihr der nächste Schritt (581+72) zu schwierig erschien.

Die Gleichung 2+3=5+81=581 lässt vielen Leserinnen sicherlich einen kalten Schauer den Rücken hinunterlaufen. Hat man nicht gelernt, dass links und rechts vom Gleichheitszeichen stets das Gleiche stehen muss?

Wir denken jedoch, dass eine unmittelbare Korrektur hier unangemessen wäre. Sicherlich sollte Andrea irgendwann lernen, dass es in der Mathematik Konventionen gibt, die ihre Berechtigung haben, etwa um die Kommunikation zu erleichtern. Zu diesem Zeitpunkt des Lernprozesses wäre es jedoch verfehlt, einzugreifen, weil für Andrea die Bedeutung ihrer Symbole vollkommen klar war.

Abb. 9: Die Lösung von Britta



Wie auch eine spätere Befragung zeigte, wäre sie nie auf die Idee gekommen zu denken, dass ihre 5 tatsächlich für die 5 stehe. Für Andrea repräsentierte sie genauso die 500, wie die 2 und die 3 die 200 bzw. die 300 darstellen sollten. Die Gleichungskette war in ihren Augen wie folgt zu lesen: 200+300=500 und 500+81=581. Da sie das Gleichheitszeichen im Sinne von „ergibt" interpretierte, lag es ihr vollkommen fern zu denken, dass die Eingabe in die Gleichungskette der Ausgabe entspräche.

In ihrem zweiten Versuch zählte Andrea zunächst sämtliche Hunderter (Ergebnis 1100) zusammen und dann die Summe zweier geschickt gewählter zweistelliger Zahlen (32+72=104) hinzu (1100+104=1204). Abschließend addierte sie die restlichen zweistelligen Zahlen Schritt für Schritt zu 1204, erst die 66 (1270) und dann die 81 (1341).

Erneut verwendete sie das Gleichheitszeichen als Ergibt-Zeichen, allerdings ohne die vorangehende Operation zu notieren. Sie verrechnete sich zunächst um 10 und korrigierte ihr Resultat (1341) dann zu einem Ergebnis, das jedoch noch weiter vom richtigen abwich (1381). Wie sie hierbei gedacht hat, muss wohl im Dunkeln bleiben. Ihre zweite Rechnung, bei der die drei besten Punktzahlen zu addieren waren, ist korrekt. Sie wurde ohne Gleichheitszeichen notiert und zeichnet sich durch den geschickten „Übergang" von 104 zu 1004 aus.

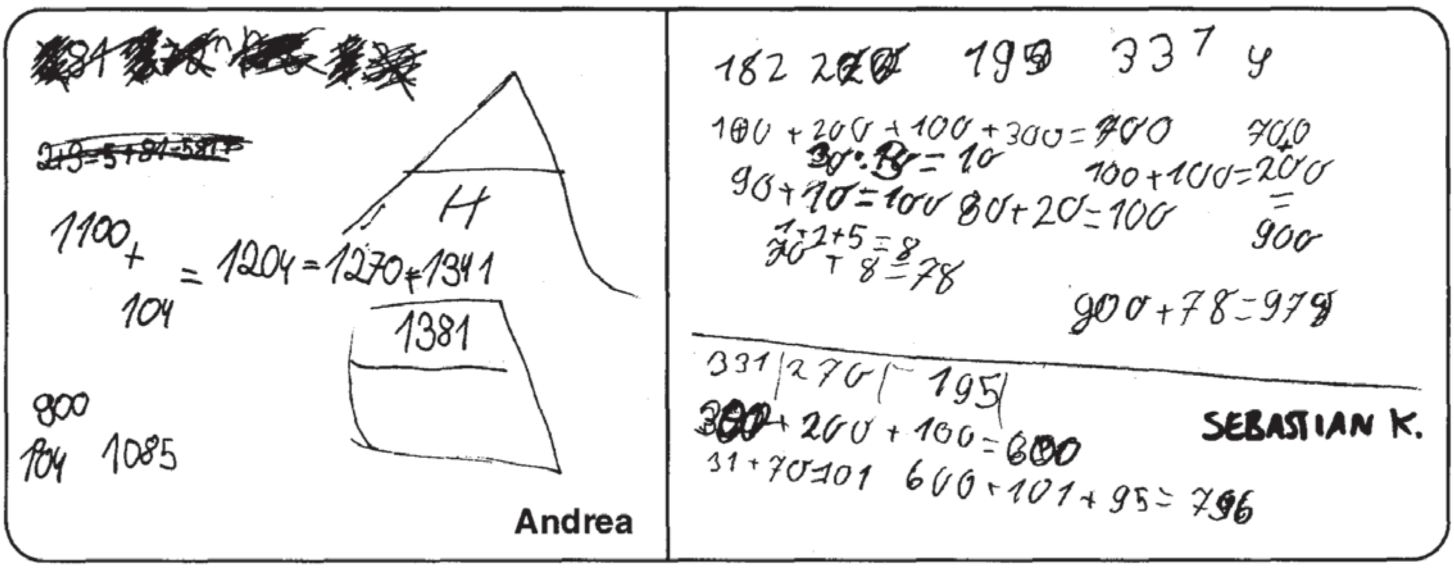
Sebastian K. erzielte folgende Punktzahlen: 182, 270, 195 und 331 (vgl. Abb. 10). Um die Gesamtpunktzahl zu erhalten addierte er eingangs die Hunderter (700). Dann zerlegte er die 30 der 331 in 10+20, so dass er die 90 (der 195) mit der 10 und die 80 (der 182) mit der 20 kombinieren und jeweils zu 100 zusammenfassen konnte. Er beschrieb dieses – vor oder nach der Notation der beiden entsprechenden Gleichungen – dadurch, dass er den Zahlensatz 30:3=10 angab. Es muss unklar bleiben, ob er damit (ggf. rechtfertigend) ausdrücken wollte, dass die Zahl 30 aus drei Zehnern besteht, die er, wie oben angegeben, verteilte.

Ebenfalls nicht zu entscheiden ist, ob er nun zunächst die beiden Hunderter zu 200 zusammenfasste, nach dem Kreuzworträtselprinzip zu den bereits erhaltenen 700 addierte und das Ergebnis 900 erhielt. Genauso gut ist es möglich, dass er zunächst die drei Einer zusammenzählte (1+2+5=8) und mit der noch nicht berücksichtigten 70 der zweiten Punktzahl verknüpfte. Schließlich notierte er rechts unten die Gesamtsumme. Bei der zweiten Teilaufgabe, bei der die drei besten Ergebnisse addiert werden mussten, wählte er eine ähnliche Herangehensweise.

Sebastian P. hatte 340, 371, 146 und 244 Punkte erzielt (vgl. Abb. 11). Er addierte ebenfalls zunächst die Hunderter und dann jeweils zwei Zehnerzahlen. Dabei ist interessant, dass er eine „inkorrekte" Schreibweise korrigierte. Er hatte zunächst 1011 (für 111) notiert. Hier ist er wohl ursprünglich davon ausgegangen, dass ähnlich wie beim Übergang von 9 zu 10 beim Übergang von 109 zu 110 eine weitere Stelle hinzuzufügen sei.

Da er hierbei eine Einerzahl (die 1 von 71) schon berücksichtigt hatte, musste er in einem weiteren Schritt nur noch zwei Einerzahlen summieren (6+4=10). Schließlich war noch die Gesamtsumme zu ermitteln: 900+111+

Abb. 10: **Die Lösungen von Andrea und Sebastian K.**



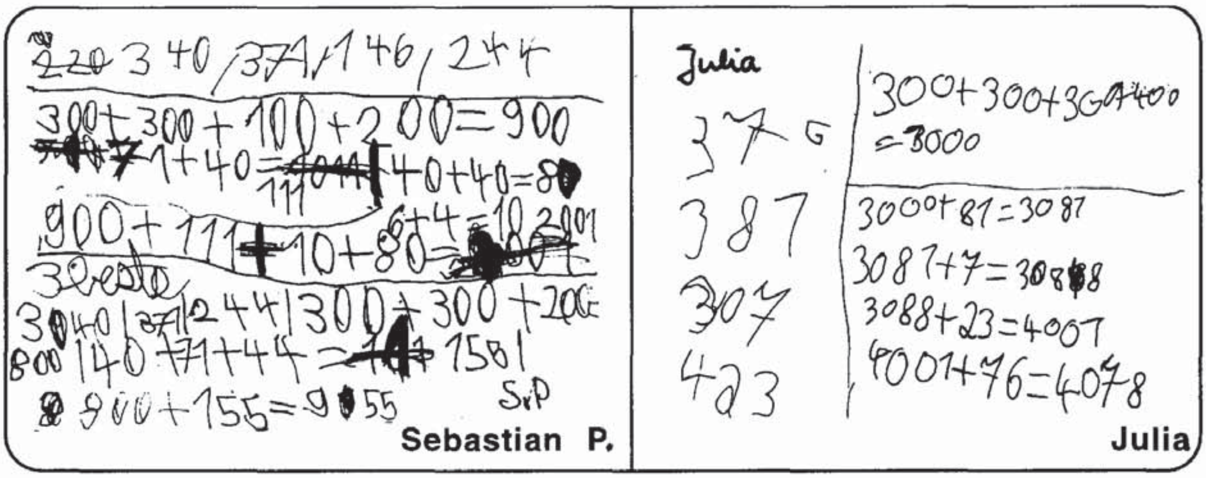
10+80. Hierbei machte ihm vermutlich der doppelte Übergang (bei 1000 sowie bei 1100) Schwierigkeiten, was die Schreibweise 2001 erklären mag. Die Vermutung, dass der Nachfolger von 1099 die 2000 sei, liegt für Kinder, die sich in unserem Stellenwertsystem noch nicht vollständig auskennen, durchaus nahe.

Bemerkenswert ist u. E., dass Sebastian P. vollständige Gleichungen schrieb und senkrechte Trennstriche verwendete, um den Abschluss einer Rechnung deutlich zu machen. Dieses tat er auch im zweiten Teil. Hier addierte er zunächst die Hunderter (800), dann die gemischten Zehner – allerdings fehlerhaft – und zählte die so statt 151 erhaltenen 155 zu 800 hinzu.

tern – ihre Eigenproduktion durch einen senkrechten und einen waagerechten Strich strukturierte, um die Hauptschritte ihres Vorgehens zu markieren.

Florian (vgl. Abb.12) addierte seine Ergebnisse (170, 297, 93, 296), indem er zunächst die Hunderter kompakt und anschließend die Zehner schrittweise hinzuzählte (vgl. Abb. 12). Dabei unterlief ihm zweimal der Fehler, jeweils 100 nicht mit einzurechnen (500+90+90 =580 und 650+90=640). Abschließend summierte er die Einer auf, wobei unsere Deutung seiner Vorgehensweise zwar plausibel, aber nicht gesichert ist: Zu 640 rechnete er zunächst 3 und 7 hinzu, vergaß dann, dass er die 7 schon einmal berücksichtigt hatte, und zählte

Abb. 11: Die Lösungen von Sebastian P. und Julia



Julia hatte die Zahlen 376, 381, 307 und 423 zusammenzurechnen (vgl. Abb. 11). Sie begann mit der Addition der vier Hunderterzahlen, hatte jedoch aller Wahrscheinlichkeit nach Schwierigkeiten, das Resultat 1300 symbolisch richtig zu notieren, wie man aufgrund der übereinander geschriebenen Ziffern 1 und 3 vermuten kann. Mit dem auf diese Weise erhaltenen Zahlsymbol 3000 rechnete sie weiter, indem sie zunächst 81 und anschließend 7 hinzuzählte.

Dann allerdings bekam sie Probleme, das Resultat der nächsten Addition (3088+23) den Konventionen unseres Dezimalsystems gehorchend zu berechnen bzw. zu notieren: Statt 3111 schrieb sie 4001. Sie vermutete wahrscheinlich, dass nach 3099 die 4000 käme. Das erklärt allerdings nicht, warum sie vergaß einen Zehner zu addieren.

Die noch nicht addierte gemischte Zehnerzahl (76) zählte sie dann noch hinzu, verrechnete sich dabei allerdings um 1. Auffällig ist, dass auch Julia – sei es zur eigenen Orientierung, sei es, um der Leserin die Interpretation zu erleichtern – ihre Eigenproduktion durch einen senkrechten und einen waagerechten Strich strukturierte, um die Hauptschritte ihres Vorgehens zu markieren.

sie ein zweites Mal hinzu. Dass am linken Rand die Zahl 657 aufgeführt wurde, lässt diese Interpretation genauso als vernünftig erscheinen, wie die Tatsache, dass er nach Addition der noch fehlenden 6 zum Endergebnis 663 gelangte.

Tim schließlich hatte die Zahlen 64, 194, 283 und 237 zu summieren (vgl. Abb. 12). Er gab die Reihenfolge seiner Rechenschritte selbst an: Zunächst addierte er die Hunderter. Dann rechnete er die vier gemischten Zehnerzahlen im Kopf zusammen. Hierbei notierte er ein Zwischenergebnis, das man als 183 deuten kann und das er durch eine Zusammenfassung von 64 und 37 zu 100 (statt eigentlich 101) mit anschließender Addition der 83 erhalten haben könnte. Schließlich könnte er zu diesem Ergebnis (183) noch 90 hinzugezählt und so das Zwischenresultat 273 erzielt haben. Hierbei hätte er dann noch – wenn er so gerechnet hätte – die 4 von der 94 vergessen, wodurch zusammen mit der ebenfalls nicht berücksichtigten 1 (von 101) die Abweichung vom eigentlichen Ergebnis (278) erklärt werden könnte.

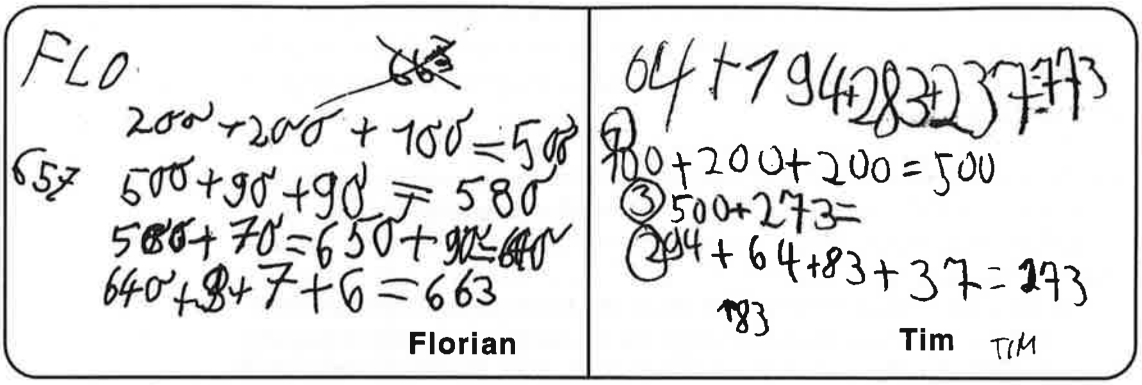


Abb. 12: Die Lösungen von Florian und Tim

In einem dritten Schritt addierte er schließlich noch die beiden Teilresultate und schrieb das Endergebnis 773 oben hin.

Zusammenfassung

Wir hoffen, dass durch die vorausgehenden Ausführungen unsere kompetenzorientierte Blickweise auf das Vorgehen der Kinder deutlich geworden ist. Wir versuchen auch bei unzusammenhängend und chaotisch wirkenden Aufzeichnungen dem Denken der Kinder prinzipiell einen rationalen Kern zu unterstellen. Unsere Deutungen mögen dann zwar manchmal vage erscheinen; wir bemühen uns jedoch auch stets, Belege für unsere Interpretationen zu finden.

Was uns hinsichtlich der Notation und der Strategien nach sorgfältiger Analyse sämtlicher Eigenproduktionen als erwähnenswert erscheint, wollen wir im Folgenden zusammenfassend aufführen.

Es hat sich zwar erwiesen, dass etwa die Hälfte aller Endergebnisse nicht korrekt war. Setzt man diese Zahl jedoch dazu in Beziehung, dass jedes Endresultat aus einer Vielzahl von Einzelrechnungen besteht und außerdem die Schüler mit anspruchsvollen Aufgabenstellungen konfrontiert waren, so relativiert sich diese Zahl. Schließlich wurden die Aufgaben zu Beginn des 3. Schuljahres von den Schülern bearbeitet, zu einem Zeitpunkt also, zu dem die Kinder sich eigentlich noch im Zahlenraum bis 100 „bewegten".

Bemerkungen zur Notation

Die Analyse der acht Beispiele zeigt unserer Meinung nach, dass es unangebracht und sogar schädlich sein kann, schriftliche Darstellungen von Problemlösungen dieser Art an formalen Ansprüchen zu messen, die an anderer Stelle angebracht sein mögen. Unser Fazit bei der Bewertung dessen, was die Kinder in puncto Darstellung geleistet haben, ist das Folgende: Sie zeigten bei der Bewältigung der nicht gerade geringen Anforderung, ihren Lösungs- oder Rechtfertigungsweg für die Lösung einer komplexen Aufgabe darzustellen, eine erstaunliche Kompetenz:

- Sie waren *erfindungsreich*, wie z.B. Annika durch ihre Striche, Britta durch die Kringel, Sebastian P. durch den senkrechten Strich als Markierung für das Ende der Rechnung oder Tim durch die Nummerierung der Schritte.
- Sie tendierten zu *ökonomischen Schreibweisen*, wie z.B. Andrea durch äußerst knappe Notation oder Sebastian K. durch „Kreuzzahlanordnung".
- Sie beschritten *unkonventionelle Wege*. Damit meinen wir die abweichende Verwendung des Gleichheitszeichens bei Andrea oder Britta sowie die selbst konstruierte Zahlschreibweise bzw. Zahlwortbildung im unerschlossenen Bereich bei Julia (3000 für 1300) oder Sebastian P. (2001 für 1201).

Im Gegensatz zu den Darstellungsweisen und Notationen der Lehrgänge, die den Kindern vorgesetzt werden und häufig das Lernen erschweren – man denke nur an die häufig künstlich erzeugten Probleme beim Zehnerübergang im ersten Schuljahr –, handelt es sich hier um von ihnen selbst gewählte Darstellungsformen, die es ihnen erleichtern den Lösungsweg darzustellen. Dass die Anforderung, etwas gemäß den üblichen Konventionen darzustellen, vielfach eine zusätzliche Schwierigkeit mit sich bringt und es sich andererseits „leichter denkt", wenn man die Dinge mehr nach eigenen Vorstellungen ausdrücken darf, ist eine Erfahrung, die wir alle vermutlich schon häufiger gemacht haben – wenn auch nicht unbedingt in der Schule.

Um nicht missverstanden zu werden: Es soll nicht geleugnet werden, dass die Entwicklung und Pflege gemeinsam geteilter Darstellungsformen auch eine wichtige Aufgabe des Grundschulunterrichts ist. Das sollte jedoch nicht dazu führen, dass die Kinder immer so lange warten müssen, etwas inhaltlich zu bearbeiten, bis sie es formal korrekt darstellen können. Diese Unsitte fängt allerdings leider oft schon im ersten Schuljahr an!

Bemerkungen zu Strategien

Natürlich kann aus den Zetteln nicht vollständig entnommen werden, wie die Kinder gerechnet haben; manche Angaben sind vielleicht auch nachträgliche Rechtfertigungen des Ergebnisses. Dennoch ist es interessant, sich einen Überblick über ihre Vorgehensweisen zu verschaffen.

Fast alle Schüler begannen mit der Addition der Hunderter, um dann die kleineren Anteile der Zahlen zu berücksichtigen. Da die Kinder in der überwiegenden Anzahl die Addition im Hunderterraum beherrschten, kann man hierbei schwerlich von einer spontanen Strategie sprechen – auch wenn man sich gut vorstellen kann, welches der Grund wäre, wenn sie spontan entwickelt werden würde: Die Hunderter sind im Hinblick auf die Zahlvorstellung und deren praktische Bedeutung die wichtigeren; zudem werden sie auch zuerst gesprochen. Das Problem, das sich dann im dritten Schuljahr ergibt, ist bekannt: Bei der Einführung des Normalverfahrens der schriftlichen Addition muss man die Kinder dazu anhalten, mit den Einern zu beginnen, bzw. sie entdecken lassen, warum das zweckmäßig ist.

Beim Hinzuaddieren der zweistelligen Zahlen konnte man fast genauso viele verschiedene Rechenwege beobachten, wie es Kinder gab. Fast alle unterscheidbaren Variationen kamen vor, z. B.:

- die Zehnerzahlen der Reihenfolge nach einzeln, dann die Einer;
- die Zehnerzahlen einzeln, aber geschickt zerlegt und neu gruppiert zu Hundertern;
- zweistellige Zahlen plus einstellige so, wie sie gut zusammenpassen;
- die zweistelligen Zahlen nacheinander zur Summe der Hunderter.

Diese Vielfalt ist überwältigend und rechtfertigt es unseres Erachtens, den Kindern so lange wie nur möglich Gelegenheit zu geben, ihre eigenen Rechenwege zu gehen. Die Bestimmungen der gültigen Lehrpläne stehen dieser Forderung leider im Wege, da sie die Behandlung der Standardverfahren für die schriftliche Addition und Subtraktion im dritten Schuljahr verbindlich vorschreiben.

Schlussfolgerungen

Dass diese Kinder im Übrigen eine solche Vielfalt von Strategien verwendeten und auch die Darstellung ihrer Lösungswege so eigenständig gestalteten, ist zuallererst darauf zurückzuführen, dass ihr Lernen vom ersten Schultag an konsequent nach den Prinzipien des aktiv-entdeckenden Lernens (vgl. Wittmann 1995) gestaltet worden war. Es war guter Brauch in der Klasse, beim gemeinsamen Rechnen die Kinder zu ermuntern, nach verschiedenen Lösungswegen zu suchen und bei jedem Ergebnis – richtig oder falsch – auch mitzuteilen, wie man es erhalten hatte.

Was kann man aus dieser Untersuchung für den Unterricht mit diesen Kindern, aber auch mit anderen Schülern lernen?

1. Das Gehen eigener Wege – auch wenn es von außen betrachtet manchmal als umständlich erscheint – ist nicht nur im Sinne der inhaltlichen, sondern auch der allgemeinen Lernziele des Mathematikunterrichts fruchtbarer als das Nachlaufen ausgetretener Pfade oder das Befahren betonierter Autobahnen, auf denen alle Hindernisse aus dem Weg geräumt sind. Nur so können die Kinder ihr eigenes Denken entwickeln und ihr Selbstvertrauen stärken.
2. Die von den Kindern beschrittenen Wege erforderten ein besseres Zahlgefühl und eine höhere arithmetische Kompetenz als die monotone Mechanik eines Normalverfahrens oder einer Standardmethode des halbschriftlichen Rechnens. Insofern ist es äußerst fragwürdig, schriftliche Algorithmen schon so früh einzuführen, wie es in Deutschland – im Gegensatz zu einer Reihe anderer Länder – allgemein üblich ist. Das Rechnen nach dem Normalverfahren ist nämlich prinzipiell nicht besser, als den Taschenrechner zu benutzen, abgesehen davon, dass das kleine Einspluseins geübt wird – das wird es allerdings bei den eigenen Methoden der Kinder auch.
3. Da den Kindern ihre eigenen Vorgehensweisen in den meisten Fällen ökonomischer erschienen als die, die das gängige halbschriftliche Verfahren vorsieht, würden wir es als Rückschritt empfinden, wenn man ihnen eine ganz bestimmte halbschriftliche Methode, wie es leider häufig passiert, vorgeschrieben hätte.

4. Der Versuch, diesen Kindern schriftliche Rechenverfahren mit Hilfe von Material nahe bringen zu wollen, wäre eine Zeitverschwendung und möglicherweise sogar eine Erschwernis gewesen. Solche Versuche beruhen auf der unseligen Ideologie, alles nur Mögliche mit Material modellieren zu müssen. Das heißt nicht, dass es nicht Gelegenheiten gibt, bei denen Material hilfreich oder sogar notwendig sein kann. Aber die Modellierung mit Material kann kein universelles Prinzip sein, das undifferenziert überall angewendet werden müsste.
5. Unseres Erachtens lohnt es sich in jedem Fall, Kindern mehr zuzutrauen und vermehrt in dieser Art mit ihnen zu arbeiten. Konkret heißt das: Einerseits nach interessanten Nichtroutineaufgaben zu suchen, andererseits – wie in diesem Fall – spontan passende Situationen zu nutzen und die Kinder mit Problemen zu konfrontieren, für deren Lösung ihnen gewisse Grundlagen zur Verfügung stehen, bei denen sie aber selbst noch etwas einbringen können und müssen.
   Weiter bedeutet das, den Kindern zu gestatten ihre Lösungswege auch auf nicht konventionelle Weise darzustellen, ohne zu befürchten, dass damit die Basis für ein späteres Chaos geschaffen wird. Den Kindern sollte also auch schon dann erlaubt werden an Problemen zu arbeiten, wenn sie noch nicht vollständig in der Lage (oder auch willens) sind, die Lösung normgerecht aufzuschreiben. Auf diese Weise wird es ihnen ermöglicht, mehr von dem zeigen, was sie wirklich können. Außerdem hat die Lehrerin mehr Gelegenheit, etwas über das Denken ihrer Kinder zu erfahren.
   Was für den Sprachunterricht schon seit längerer Zeit gefordert und sicherlich auch häufiger umgesetzt wird, nämlich die Kinder erzählen und eigene Texte schreiben zu lassen, auch wenn sie das, was sie erzählen oder schreiben, noch nicht der Norm entsprechend ausdrücken können, ist in analoger Weise für den Mathematikunterricht längst überfällig. Verhindert wird das möglicherweise dadurch, dass die Mathematik reduziert wird auf ihre üblicherweise verwendete symbolische Darstellung.

DAS HAT GOTT IHM EINGEDICHTET

Wir fahren aus dem Urlaub zurück. Hannah (6 Jahre, 3 Monate) erzählt auf Fahrten immer viel und wälzt philosophische Fragen: „Mama, woher wusste eigentlich der erste Mensch, dass 100 und 100 zweihundert ist?“ Ich reagiere nicht sofort. Hannah: „Ich glaube, das hat ihm Gott eingedichtet.“

Anne Weddeling

RENSKE UND DIE GEBURTSTAGE

Wir unterhielten uns über Alter und Geburtstage. Plötzlich sagte Renske (5): „Wenn man gestorben ist, hat man eigentlich immer noch Geburtstag, aber man feiert es nicht mehr."

Adri Treffers

Und das ist das Krankenhaus!

Eine Lehrerin möchte in ihrer Klasse das Spiel „Räuber und Goldschatz“ einführen. Um die Orientierungsübungen an der Zwanzigerreihe, die dieses Spiel beabsichtigt, möglichst kindgerecht und motivierend zu gestalten, hat sie zwei Handpuppen mitgebracht – eine für den Plusräuber Paul, eine weitere für den Minusräuber Max. Mit Hilfe der Kinder nun soll einer der beiden Räuber einen auf der Mitte der Zwanzigerreihe liegenden Goldschatz würfelnd in seine eigene Höhle bekommen. Diese Höhlen hat die Kollegin liebevoll aus mit Tüchern drapierten Schuhkartons hergestellt, jeweils versehen mit einem Plus- bzw. einem Minuszeichen.

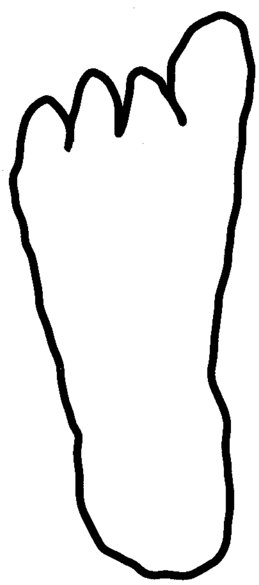
Abb. aus: „Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr“ von Wittmann, Müller u. a., (1994).

Die Lehrerin versammelt also zu Beginn der Stunde die Kinder im Sitzkreis rund um den von ihr großformatig gestalteten Spielplan. Sie setzt den Impuls „Euch ist bestimmt etwas aufgefallen!“ und die Kinder erzählen, angeregt von den Handpuppen, was sie alles von Räubern wissen. Andere bemerken: „Das ist ein Spiel!“, „Da sind Zahlen drauf!“, „Bestimmt muss man da würfeln!“, „Da ist ein Schatz!“. Markus zeigt auf die Behausung des Minusräubers und sagt: „Da ist eine Höhle!“ Susanne meldet sich. Die Lehrerin erwartet, dass Susanne nun ebenfalls äußert, dass dieses eine Höhle sei. Sie jedoch zeigt auf die Höhle des Plusräubers, die durch das rot ausgemalte Kreuz gekennzeichnet ist, und sagt: „Und das ist das Krankenhaus!“

Beate Sundermann

Katrin oder die geplatzte Proporzstunde

Angeregt von englischen Kollegen wage ich gegen Ende des 4. Schuljahres, die Kinder waren in den vorangegangenen Jahren bereits an viel Geometrie gewöhnt worden, einen Versuch mit dem Thema Ähnlichkeit und Proportionen. Meinen vorbereiteten papierenen Riesenfuß, zwei DIN A4-Blätter lang, hefte ich gleich zur ersten Stunde an die Wand neben die Tafel: „Heute nacht gab es in meinem Garten eine fürchterliche Randale, das ganze Haus zitterte. Muss ein Riese durchgegangen sein. Nur eine einzige Fußspur konnte ich finden. Die habe ich mit Papier ausgelegt und ausgeschnitten. Das ist sie!"



Gleich kommt Protest von mehreren: „Kann gar kein Riese sein, hatte ja nur vier Zehen!" Und Christina fragt sogar spöttisch: „Haben Sie nicht in ihrem Blumenbeet noch einen Zeh gefunden?!" Meine Mär, dass alle Riesen nur vier Zehen hätten, stößt auf Skepsis. Doch lassen sich die Zweifler wenigstens für die Frage nach der Größe interessieren: „Ich habe nur einen großen Schatten gesehen. Wie groß mag der Kerl wirklich gewesen sein!" Und Katrin liefert sofort einen treffenden Ansatz: „Mal angenommen, Ihr Fuß passte dreimal in seine Stapfen, dann muss er ja wohl auch dreimal so groß gewesen sein!"

Das war's, so verpuffen große Hoffnungen auf geplante Einstiege und lange ersprießliche Diskussionen! Immerhin, nicht alle haben Katrins Idee verstanden. Christine stellt sich zur Verfügung und wir messen ihre Fußlänge. Erfreulicherweise gehen ihre 21 cm gerade rund dreimal in des Riesen mit 64 cm. Dann messen wir ihre Körpergröße: 135 cm. Also müsste der Riese etwa dreimal so groß, d.h. über 4 m groß gewesen sein! Das erstaunt keinen, auch als wir im Klassenzimmer prüfen, dass er dann bis zur Decke hinaufreichen würde. Hingegen regt sich erneut Widerspruch: „Also es gibt ja ganz große Leute mit ganz kleinen Füßen!" – „Ja, und andere haben ganz große Füße, und sind doch sehr klein." Jennifer muss dazu als Beispiel herhalten. Katrin sagt trocken: „Vielleicht fangen wir noch einmal ganz von vorn an?"

Heinrich Bauersfeld