2 Kinder rechnen anders

Die Lernenden als Mathematik-Schaffende ernst zu nehmen bedeutet zuallererst, sich auf ihre Denkwege einzulassen und diese zu würdigen. Wir beginnen mit einem Beispiel: Es lohnt sich, den Transkriptausschnitt aus einem Interview mit der Drittklässlerin Annika genau zu studieren und sich vor dem Weiterlesen zu überlegen, wie sie auf die Lösung gekommen ist (vgl. Fromm & Spiegel, 1996).

Die Aufgabe, die *vor* der unterrichtlichen Behandlung des multiplikativen Rechnens im Zahlenraum bis 1 000 gestellt wurde, lautete: „Auf einem See sind 200 Leute mit dem Ruderboot unterwegs. Insgesamt sind 40 Ruderboote auf dem See, in jedem sind gleich viele Personen. Wie viele sind in jedem Boot?"

Äußerungen von **Annika** und der *Interviewerin* sind durch verschiedene Schriften kenntlich gemacht.

---

40 Leute ... und dann müsste man sagen, dass das eigentlich ... 60 Leute auf jedem wären.

Hm, wieso? Wie bist du darauf gekommen?

Da hab ich jetzt einfach ganz normal 200 durch 40 gerechnet. Wegen mit den Fünfzigern, da sind immer, ich meine ... 3 Boote, äh, ich meine, dingsdabums Leute. ... Wie viele Boote? 40 Boote? Dann sind auf jedem Schiff ... 200 durch 4 ... also was ist jetzt ... noch mal ... was ist es, ah, jetzt bin ich voll durcheinander. 200 durch 40 ... 3. 3 Leu ... nicht 30 ... (nach 10 Sekunden) **gleich 3 ... 3 dingsdabums.**

Hm? 3?

30.

30.

Nein, 3. (beide lachen)

Woher weißt du das?

Hab einfach 50 gerechnet, ähm, in 100 sind ja immer 2 mal 50 drin (A. schreibt eine 50.) **... und dann hab ich 50 und ... 50 ... äh, durch 200 sind 4 und durch 40 sind ... warte mal, durch 200 ... 500 meine ich.**

Hm? Was 500?

5 Schiffe sind's äh, 5 sind dann ... dann kommt 5 raus, weil bei jedem bleiben ja, wenn's 200 sind, bei 5 ... wenn man durch vier ... ... fünfzig rechnen würde, würden da immer vier ... (I. nickt.) **40 rauskommen ... äh, 4 meine ich, und dann ähm, bei ... und dann bleibt ja bei jedem bei 40 zwei über, und daraus macht man noch wieder 4. Und dann hab ich ... ist die ja fertig, die Aufgabe.**

Dann sind's 5. (A. nickt.) *Oh, toll!*

Das Chaos scheint perfekt zu sein. Man könnte denken, dass Annika zu keinem vernünftigen Gedanken fähig ist. Doch zum Schluss erhält sie die richtige Lösung, auf eigenen Wegen und mathematisch durchaus substanziell. Wenn man nämlich das, was sie sagt und vermutlich denkt, übersetzt in das, was wir verstehen, dann liest sich das wie folgt:

---

200 ist viermal 50. Wenn ich aber aus der 50 eine 40 mache, dann bleiben bei zwei Fünfzigern (gleich 100) zwei Zehner übrig. Bei 200 habe ich also 4 davon, das ist wieder eine 40. Also sind es fünf mal 40.

Vordergründig erscheint die Szene also vollkommen undurchsichtig. Analysiert man sie jedoch genauer, so erkennt man, dass Annika eine arithmetische Strategie entwickelte. Diese versetzte sie in die Lage, eine Aufgabe zu lösen, die im Unterricht noch nicht behandelt worden war. Die Episode zeigt, wie schwierig es sein kann, das Denken der Kinder aus ihren Äußerungen zu erschließen. Sie verdeutlicht allerdings auch, dass wir bei viel Geduld und Einfühlungsvermögen interessante Dinge entdecken können, die wir sonst nicht bemerken würden.

Annikas Rechenweg ist ungewöhnlich. Er ist aber gleichzeitig ein repräsentatives Beispiel für originelle und häufig schwer zu verstehende Strategien von Kindern. Es weist darauf hin, wie wichtig es ist, auch im (Unterrichts-)Alltag anzustreben, unseren Kindern mehr zuzuhören, und zu versuchen ihr Denken besser zu verstehen. Natürlich sollten wir uns darauf nicht beschränken. Unsere Anstrengungen sollten auch dahin gehen, die Kinder dazu anzuregen, sich anderen Personen gegenüber sowohl mit selbst entwickelten als auch mit gemeinsam geteilten Darstellungsformen immer besser verständlich zu machen. Die Schulung der mathematischen Ausdrucksfähigkeit ist ein zu Unrecht vernachlässigtes Ziel des Unterrichts.

Die Einstellung, in dieser Weise auf der *Mathematik der Kinder* aufzubauen, setzt voraus, dass wir ihr Denken nicht als defizitär, sondern als *prinzipiell vernünftig* ansehen. Das bedeutet, dass wir grundsätzlich bei unverständlichen Äußerungen und Fehlern nach der verborgenen Rationalität suchen sollten.

Kinder rechnen anders. Diese Verschiedenheit begegnet uns in ganz unterschiedlichen Erscheinungsformen. Wie wir in diesem Kapitel ausführen möchten, rechnen sie bisweilen anders, ...

- als wir selbst rechnen,
- als wir es vermuten,
- als andere Kinder und
- als eben noch bei „derselben" Aufgabe.

Die Beispiele, die wir zur Illustration anführen werden, ermöglichen interessante Einblicke in Bereiche des Rechnens, die für die meisten von uns zu „banalen Gewohnheiten" (Freudenthal 1978, 74) gehören dürften, die bei den Kindern jedoch eine Fülle unterschiedlicher interessanter Denkweisen umfassen.

2.1 Kinder rechnen anders, als wir selbst rechnen

Die Rechenmethoden, die Kinder entwickeln, können sich z.T. deutlich von den Vorgehensweisen unterscheiden, die wir als Erwachsene benutzen. Svens Trick kann hierfür als ein treffendes Beispiel gelten. Wir empfehlen der Leserin, zunächst einmal selbst zu versuchen seine Denkweise zu ergründen:

Der Zweitklässler Sven wollte wissen, was herauskommt, wenn man die Zahlen 9, 12, 10, 11, 8, 10, 9, 8, 12, 11, 10 und 12 zusammenrechnet. Er schrieb **119, 121, 121, 122, 120, 120, 119, 117, 119, 120, 120, 122,** zeigte dieses seiner Lehrerin und fragte: **„Ist das richtig so?'**

Die meisten Erwachsenen würden diese Aufgabe vermutlich durch die Addition der zwölf Summanden (ggf. unter Ausnutzung von Rechenvorteilen) lösen. Sven hingegen wählte eine gänzlich andere Herangehensweise. Er merkte, dass zwölf Zahlen zu summieren waren, die allesamt in der Nähe der 10 lagen. Zunächst ermittelte er im Kopf – sei es additiv oder multiplikativ – die Summe von zwölf Zehnern und nahm dann die 120 als Ausgangspunkt seiner weiteren Überlegungen.

Da der erste Summand nicht 10, sondern 9 lautete, musste Sven von 120 eine 1 subtrahieren. Als erstes schriftliches Zwischenresultat konnte er somit die 119 vermerken. Als zweiter Summand war eine 12 vorgegeben – eine um 2 größere Zahl als 10, sodass zu 119 eine 2 zu addieren war. Sein zweites schriftlich notiertes Ergebnis war daher 121. Im Folgenden ermittelte er jeweils den Unterschied der einzelnen Summanden zur 10 und addierte diesen zum bzw. subtrahierte ihn vom vorangehenden Resultat. Wenn exakt 10 zu summieren war, schrieb er das Zwischenergebnis erneut hin. Auf diesem Wege gelangte er schließlich zum korrekten Endresultat 122.

Ein zweites Beispiel: In einer Klassenarbeit wurde Viertklässlern die folgende Textaufgabe gestellt: „Die Firma ‚Puddingwunder' füllt immer 40 g Puddingpulver in eine Tüte. Am Freitag werden 861 kg Puddingpulver abgepackt." Viele Erwachsene würden hier vermutlich schriftlich dividieren. Zwei Kinder führten zur Beantwortung der Frage „Wie viele Tüten werden am Freitag verpackt?" folgende Rechnungen aus:

Dirk:

$$200 : 40 = 5$$
$$200 \cdot 5 = 1000$$
$$5 \cdot 5 = 25$$

$$\begin{array}{r} \underline{861 \cdot 25} \\ 17220 \\ \underline{+4305} \\ 21525 \end{array}$$

Daniel:

$$400 : 40 = 10 \text{ Tü}$$
$$800 : 40 = 20 \text{ Tü}$$
$$1000 : 40 = 25 \text{ Tü}$$

$$800 \cdot 20 = 16000$$
$$61 \cdot 20 = 1220$$
$$861 \cdot 5 = 4305$$

$$16000 + 1220 + 4305 = 21525 \text{ Tü}$$

Beide Schüler gaben die richtige Antwort, am Freitag würden 21525 Tüten verpackt. Dirk ermittelte zunächst, für 200 g benötige man fünf Tüten (200: 40). Dann notierte er, man müsse die 200 verfünffachen um 1000 zu erreichen. Das bedeutete, dass die 5 (Anzahl der Tüten) ebenfalls mit 5 zu multiplizieren war. Damit ergaben 1000 g (1 kg) insgesamt $5 \cdot 5 = 25$ Tüten. Insgesamt waren 861 kg abzupacken. Das Resultat der Aufgabe $861 \cdot 25$ erhielt Dirk dann mit Hilfe der schriftlichen Multiplikation.

Daniel wählte folgenden Lösungsweg: Zunächst stellte er fest, dass 400 g Puddingpulver 10 Tüten und entsprechend 800 g 20 Tüten bzw. 1000 g 25 Tüten ausmachten. Dann berechnete er ebenfalls das Produkt $861 \cdot 25$, jedoch nicht mit Hilfe des Standardalgorithmus, wie es Dirk getan hatte. Er splittete $861 \cdot 25$ in drei Teilprodukte auf ($800 \cdot 20$, $61 \cdot 20$ sowie $861 \cdot 5$) und addierte schließlich die drei Zwischenresultate.

Auch das dritte Beispiel soll illustrieren, dass Kinder Lösungswege wählen können, die mit erwachsenentypischen Denkweisen nicht übereinstimmen. Mehr als das: Sie sind manchmal so intelligent, dass wir Erwachsenen große Schwierigkeiten haben, sie in ihrer Originalität und Kreativität zu erkennen.

Ebenfalls in einem 4. Schuljahr wurde in einer Klassenarbeit die folgende Aufgabe gestellt: „Der Apotheker füllt 1,750 kg Salmiakpastillen in Tüten zu je 50 g. Wie viele Tüten erhält er?" In Annikas Arbeit war die folgende Lösung zu finden:

1,750 kg : 50 g

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 7 = 14 \\ 1 \cdot 1 = 1 \\ 2 \cdot 10 = \underline{20} \\ 35 \end{array}$$

Antwort: Der Apotheker erhält 35 Tüten.

Bei der ersten Durchsicht der Arbeit verstand die Lehrerin den Lösungsweg nicht. Da es ja nicht nur auf richtige Ergebnisse, sondern auch auf richtige Rechenwege ankam, wusste sie nicht, wie sie Annikas Lösung bewerten sollte. Zwei Kollegen, denen sie die Arbeit am Nachmittag zeigte, hatten ebenfalls den Eindruck, dass nichts Richtiges dahinter stecke und das Endresultat irgendwo abgeschrieben worden sei. Abends jedoch hatte die Lehrerin dann eine Vermutung ...

Am nächsten Morgen bat sie Annika, die Aufgabe erneut zu lösen. Annika notierte an der Tafel exakt denselben Rechenweg. Dann fragte die Lehrerin die anderen Schüler, was Annika wohl gedacht habe. Sebastian erläuterte ihren Rechenweg wie folgt: Sie hatte sich überlegt, dass 100 g zwei 50-g-Tüten seien, 700 g also insgesamt $2 \cdot 7 = 14$ Tüten. Die fehlenden 50 g der 750 g repräsentierte sie durch den Zahlensatz $1 \cdot 1 = 1$. Die Anzahl der Tüten für die restlichen 1000 g berechnete sie entsprechend als $2 \cdot 10 = 20$, da ein Tausender aus zehn Hundertern besteht. Danach addierte sie die Teilsummanden $(14 + 1 + 20)$ und gab die Antwort 35.

Die meisten Erwachsenen hätten die Lösung vermutlich auf ganz andere Weise erhalten. Nicht nur Annikas Lösungsweg ist interessant, sondern auch die Tatsache, dass dieser von Sebastian auf Anhieb verstanden wurde, während mehrere Erwachsene hierzu nur schwerlich in der Lage waren. Zunächst einmal ist dieser Umstand überraschend. Aber warum eigentlich? Warum sollten Kinder nicht in der Lage sein, das Denken anderer Kinder „besser" zu verstehen als wir Erwachsenen?

2.2 Kinder rechnen anders, als wir es vermuten

Kinder rechnen nicht nur anders, als wir rechnen, sondern sie rechnen auch anders, als wir vermuten, wie sie rechnen. Hierzu ein Beispiel: Bevor das multiplikative Rechnen jenseits der Zahlensätze des kleinen Einmaleins im Unterricht behandelt worden war, bekam die Drittklässlerin Lina in einem Interview die Aufgabe 60:4 gestellt (vgl. Spiegel & Fromm, 1996). Ihr Lösungsansatz bestand darin, eine Zahl zu suchen, deren Vierfaches 60 ergab: Sie begann mit 20, probierte es dann mit 18 und 21 und versuchte es dann mit der 16. An dieser Stelle setzt das folgende Transkript ein.

Ähm, 16 mal ... äh, 16 mal 4 ist ... 4 Zehner sind erst mal wieder 40, dann 46 und plus 4 ... 50 ... 52 plus 6 sind 58 ... passt auch nicht.
Wieso hast denn du gerade plus 6 gesagt?
Was, wo?
Du hast gerade plus 6 gesagt. 52 plus 6 sind 58.
Ja.
Wieso 6?
Weil ich da noch einmal ... ich hatte ja 16 mal 4 gerechnet. Da musste ich noch eine 6 dazurechnen. Weil ich erst die ganzen vier Zehner gemacht habe und dann die Sechser.
Aber wenn du 16 mal 4 rechnest, sind es ja nicht 4 Sechser, sondern 6 Vierer, ne, die du dazurechnen musst. Aber du weißt ja, dass zehnmal 4 40 ist, hast du eben gesagt, ne?
Ja.
Und wievielmal 4 sind 20? (L. überlegt, lacht) *Hilft dir das vielleicht?*
Wievielmal 4 Zehner oder ... ?
Zehnmal 4 sind 40.
Ja.
Und wie viel fehlen dann noch bis 60?
20.
Und wievielmal 4 sind 20?
Was? Wievielmal 4 sind 20? (L. leise) **8 ... 12 ... 16 ... 20.** (laut) **Ah, jetzt hab ich nicht mitgezählt, ich Doofi, ähm, mal eben zählen. Also 4, 8, 12, 16, 20 (zählt mit den Fingern die einzelnen Vierer mit) ... 5.**
Hm, und wenn du jetzt weißt, dass zehnmal 4 40 sind und fünfmal 4 20 ist? 5?
(nach 24 Sekunden, L. unsicher) **Nee ... oder doch ...**
(nach 25 Sekunden) *Die 4 passt zehnmal in die 40 und fünfmal in die 20 ... zehnmal in die 40 und fünfmal in die 20. Und 40 und 20 ist ja 60. Wie oft passt sie dann in die 60?*
Die 4 ...
Wenn sie zehnmal in die 40 passt und dann noch fünfmal dazu ...
15.
15, ne.
Hm.

Wie das Transkript zeigt, „musste" Lina die Antwort schließlich gewissermaßen in den Mund gelegt werden, obwohl sie eingangs doch eine Erfolg versprechende Strategie entwickelt hatte. Hätte die Interviewerin nicht eingegriffen, hätte Lina im nächsten Schritt vermutlich getestet, ob das Vierfache von 15 die gesuchte 60 ergeben würde. Doch dazu kam es nicht, weil die Interviewerin irrtümlich annahm, Lina versuche herauszufinden, wie oft die 4 in die 60 passte, und ihre Hilfestellungen auf dieses Denkmodell bezog. Lina hingegen suchte eine Zahl, deren Vierfaches 60 ergab. So wurde die vermeintliche Hilfe durch die Interviewerin zum Hindernis (vgl. auch Selter 1996, 10).

Wir vermuten, dass sich vergleichbare Episoden im Unterricht häufiger ereignen, als gemeinhin angenommen wird. Wer die Hintergründe nicht sofort sieht – so wie es in diesem Fall auch der Interviewerin passiert ist – fragt sich dann, warum dem Kind die gut gemeinten Hilfen nicht helfen.

Das Problem im vorliegenden Beispiel liegt nicht darin, dass Lina den zugrunde liegenden Sachverhalt nicht erfasst hat, sondern darin, dass sie anders denkt, als die Interviewerin es vermutet. Somit reden beide aneinander vorbei. Der Grund hierfür besteht höchstwahrscheinlich darin, dass Lina 16 mal 4 sagt, was die Interviewerin als 16 mal die 4 versteht – ganz in Übereinstimmung mit der bei der Multiplikation benutzten Konvention, den Multiplikator zuerst zu nennen. Lina meinte aber 4 mal die 16, wie aus ihren Aussagen deutlich werden kann.

Warum haben wir dieses Beispiel nicht in den vorangehenden Abschnitt aufgenommen? Im Abschnitt 2.1 haben wir Beispiele angeführt, bei denen das Denken der Kinder sich von demjenigen der (meisten) Erwachsenen so sehr unterscheidet, dass es schwer fällt, den Rechenweg zu verstehen. In diesem Beispiel ist jedoch die Vorgehensweise von Lina keineswegs ungewöhnlich. Die Interviewerin war sich der beiden Möglichkeiten, die Aufgabe auszurechnen, durchaus bewusst – schließlich hatte sie zahlreiche Interviews geführt und die unterschiedlichsten Vorgehensweisen beobachtet. Gleichwohl waren ihre Bemühungen, Linas Rechenweg zu verstehen, nicht von Erfolg gekrönt, da ihre Interpretation diesen nicht erfasste.

Wir haben hier ein Beispiel für die Schwierigkeit, mit dem mathematischen Denken der Kinder richtig umzugehen. Vermutungen können auf vielfältige Art an der Wirklichkeit vorbeigehen und dazu führen, dass Kinder sich nicht ernst genommen fühlen: Unterschätzung wie auch Überschätzung dessen, was sie zu leisten imstande sind, haben dann unangemessene Lernangebote zur Folge.

Pointiert formuliert – und damit natürlich vereinfachend – kann man die in diesem Zusammenhang relevanten Forschungsergebnisse wie folgt zusammenfassen. Die *mathematischen* Kompetenzen von Schülern werden – insbesondere *vor* der Behandlung eines Unterrichtsinhalts – häufig *unterschätzt* (vgl. beispielsweise Selter 1995; van den Heuvel-Panhuizen 1995; Hengartner & Röthlisberger 1995; Trickett & Sulke 1993), während ihre Fähigkeiten im Umgang mit den *didaktischen* „Zurüstungen" des Lernstoffs nicht selten *überschätzt* werden: Lernhilfen sind immer auch Lernstoff. Für den Bereich der Veranschaulichungen beispielsweise liegt eine Fülle von theoretischen und empirischen Analysen vor (vgl. etwa Schipper & Hülshoff 1984; Radatz 1995; Voigt 1991; Gravemeijer 1990).

Diese haben ergeben, dass Veranschaulichungen keineswegs selbstverständlich sind. Die Schüler müssen häufig erst lernen, wie diese zu verstehen und zu gebrauchen sind. Sie müssen also verstehen, wie die Lehrerin (bzw. die Schulbuchautorin) denkt, auf was sie „hinauswill". Dass es auch anders sein sollte, dass die Lehrerin nämlich auch lernt, wie die Schüler denken, wollen wir mit diesem Buch ein Stück weit anregen.

Dabei erscheint es uns besonders wichtig zu sein, dass sich ein anderes Verhältnis zum Fehler entwickeln sollte. Fehler sollten nicht als Makel angesehen werden, die schnellstmöglich ausgemerzt oder – besser noch – direkt im Keim erstickt werden sollten. Stattdessen sollten wir sie als integrale Bestandteile eines konstruktiven Lernprozesses verstehen (Kahl 1995; Wieland 1991).

Diese Sichtweise geht davon aus, dass Fehler meistens einen rationalen Kern haben: Fehler sind selten Zufall (Radatz 1980; Gerster 1982; Lorenz 1984). Einige Beispiele: Wenn Andrea „2+3=5+81=581" schreibt, jedoch „200+300=500 und 500+81=581" meint, oder wenn Annika „50 durch 200" sagt, aber eigentlich mit der Aufgabe „200 durch 50" befasst ist, so handelt es sich um Fälle, bei denen der „mathematische Fehlerteufel" am liebsten sofort einschreiten würde.

Wir sind jedoch der Auffassung, dass man das Denken der Kinder empfindlich stören kann, wenn man sie sofort zu korrigieren versucht. Dieses schließt die allmähliche Gewöhnung an eine in unserem Sinne korrekte Sprech- und Schreibweise keinesfalls aus. Im Moment des Gebrauchs handelt es sich allerdings um authentische Ausdrucksformen der Kinder, die das Richtige meinen können und die wir – genauso wie die „fehlerhaften" Schreibprodukte im Sprachunterricht des ersten Schuljahres – in ihrer Vorläufigkeit wahrnehmen und würdigen sollten.

Im Folgenden wollen wir weitere Beispiele dafür geben, dass hinter Fehlern häufig vernünftigere Überlegungen stecken, als man es mit flüchtigem Blick vermuten würde. Nicht selten gehen Schüler nahezu vollständig richtig vor, erzielen jedoch nicht das korrekte Ergebnis, weil sie an einer bestimmten Stelle einen falschen „Input" verwenden.

So rechnete beispielsweise Jonas zunächst **60 : 6 = 5** und dann **6 : 3 = 2**, daher sei **60 : 3 = 10**. Mit dem richtigen 60 : 6 = 10 wäre bei gleicher korrekter Schlussweise das richtige Ergebnis herausgekommen.

Leonie sagte: **Weil 7 + 5 = 14 ist, ist 8 + 3 = 13**. Sie erhöhte dabei den ersten Summanden um 1 und verminderte den zweiten um 2, was sich – wie sie ganz richtig erkannte – in einer Verminderung des Ergebnisses um 1 bemerkbar macht. Leider ging sie von einem falschen Resultat für die erste Aufgabe aus.

Ein drittes Beispiel: Jan bekam die Aufgabe 20 – 7 gestellt und gab **96** als Ergebnis an. Er zählte dabei rückwärts, verwendete statt neun*zehn* jedoch die ähnlich lautende neun*zig* und zählte dann (gemäß seiner Wahrnehmung wohl weiterhin rückwärts, aus unserer Perspektive vorwärts) weiter: 91, 92, 93, 94, 95, 96.

Eine ebenfalls nicht so offensichtliche, aber durchaus interessante Erscheinungsform „vernünftiger" Fehler ist dadurch gekennzeichnet, dass Prozeduren oder Beziehungen auf Bereiche übertragen werden, in denen sie nicht anwendbar sind. Auch hier denken Kinder dann anders, als wir es vermuten.

So rechnete Elina beispielsweise aus, dass **400 : 10 = 40** sei, also gelte **40 : 5 = 20**. Sie übertrug dabei wahrscheinlich die Idee des gleichsinnigen Veränderns von der Multiplikation (4 · 10 = 40, also 4 · 5 = 20) auf die Division.

Ein zweites Beispiel: Marco ermittelte das Resultat von 55 · 55, indem er **55 · 55 = 50 · 60** notierte und dieses Produkt korrekt berechnete. Er wendete also die Idee des gegensinnigen Veränderns zweier Summanden (55 + 55 = 50 + 60) auf Faktoren an.

Saskias Denkweg schließlich wollen wir als drittes Beispiel angeben. Sie sagte: **Ich teile eine Zahl durch 24, indem ich sie erst durch 20 und durch 4 teile und die Ergebnisse dann zusammenzähle.** Sie dehnte dabei also vermutlich die Strategie, eine Malaufgabe durch die Berechnung von Teilprodukten mit anschließender Addition zu lösen ($24 \cdot x = 20 \cdot x + 4 \cdot x$), auf die Division aus, bei der sie aus verständlichen Gründen nicht greift.

Wie wir auch in den folgenden Kapiteln andeuten werden, lassen sich viele weitere Beispiele finden, bei denen man einen rationalen Kern im scheinbar irrationalen Vorgehen vermuten kann. Wir denken, dass es sich daher immer lohnt, einen Perspektivenwechsel vorzunehmen und einen Lösungsweg auch vom Standpunkt des Kindes aus zu betrachten. Dann sind wir in der Lage, den Ursachen von Fehlern nachzuspüren, um zu verhindern, dass Kinder auch denjenigen Teilen ihres Denkens zu misstrauen beginnen, die nicht „fehlerhaft" sind.

2.3 Kinder rechnen anders als andere Kinder

Bislang haben wir Beispiele angeführt, bei denen sich das Erwachsenendenken von dem der Kinder unterschied. In diesem Abschnitt wollen wir einen Einblick darin geben, dass auch die Denkwege einzelner Schüler voneinander z. T. stark differieren können – insbesondere *vor* der unterrichtlichen Thematisierung des entsprechenden Lerninhalts.

So haben beispielsweise Drittklässler zu Beginn des Schuljahres, also vor der Behandlung des multiplikativen Rechnens jenseits des kleinen Einmaleins, die folgende Aufgabe gelöst: „Ein Turm hat 100 Fenster. Auf jedem Stockwerk sind 4 Fenster. Wie viele Stockwerke hat der Turm?"

Jana rechnete dabei: 10 · 4 = 40; **20** · 4 = 80; also blieben noch 20; 20 = 5 · 4; **20 + 5 = 25**.

Lina ging wie folgt vor: 4 · ? = 100; 4 · 50 = 200; also 4 · **25** = 100.

Andrea berechnete zunächst, dass 50 die Hälfte von 100 sei, und halbierte dann die 50, so dass sie das Resultat 25 erhielt.

Annika schließlich wählte folgende Vorgehensweise: 5 · 20 = 100; 4 · **20** + 4 · **5** = 100; also sei 4 · **25** = 100.

Diese vier Kinder produzierten also bei derselben Aufgabe vier ganz unterschiedliche Lösungen. Analysiert man sämtliche Schülerlösungen dieser Lerngruppe, so wird die Vielfalt noch größer. Dabei nutzten die Kinder keineswegs immer dem Aufteilen nahe liegende Lösungswege, indem sie die Anzahl der Vierermengen ermittelten (vgl. auch Kap. 2.4). Daneben entwickelten sie auch dem Verteilen nahe liegende Vorgehensweisen und zerlegten die 100 in vier gleich große Teilmengen, was natürlich auch mit den verwendeten Zahlen zusammenhängen mag.

Wir geben ein weiteres Beispiel für die Heterogenität der Denkweisen von Kindern: Vor der Behandlung der Subtraktion im Tausenderraum wurde Schülern eines anderen dritten Schuljahres die folgende Aufgabe gestellt: „Im Kino können 216 Personen sitzen. Es sind schon 148 da." Die Schüler sollten ihre Vorgehensweise mit Hilfe des sog. Rechenstrichs entwickeln bzw. darstellen. Dabei handelt es sich um einen leeren Zahlenstrahl, auf dem die Kinder ihre Rechenschritte durch die Angabe der Sprungweite bzw. von (Zwischen)-Ergebnissen festhalten können (vgl. Beishuizen & Klein 1997; Höhtker & Selter 1995; Sundermann & Selter 1995).

Sämtliche in dieser Klasse zu beobachtende Lösungswege gehen aus dem Dokument D 7 hervor (Kap. 4.1). Einige Schülerlösungen sind aus der Abb. 2 ersichtlich.

So subtrahierte Kristina schrittweise zunächst den Hunderter, dann die Zehner und dann die Einer (216–100–40–8), während Patrizia (216–100–20–20–4–4) und Manuela (216–100–20–20–8) Zehner bzw. Einer weiter aufteilten. Eine andere Strategie bestand darin, den Subtrahenden so aufzuspalten, dass „glatte" Zahlen als Zwischenergebnisse dienten (Simone: 216–100–6–42; Oliver: 216–110–6–30–2; Katrin: 216–16–100–30–2).

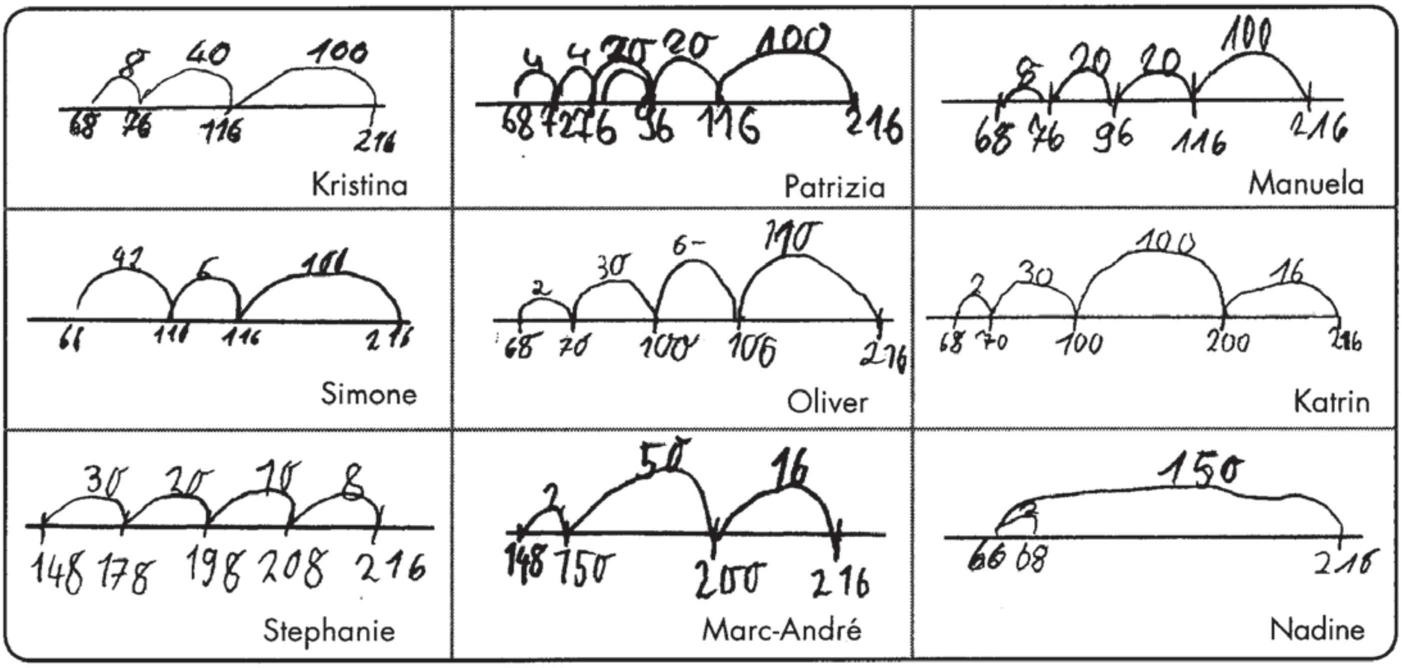

Abb. 2: Lösungen der Kinoaufgabe

Andere Schüler wurden durch die Aufgabenstellung veranlasst, zu ergänzen, so etwa Stephanie, die „stellengerecht" auffüllte (zuerst die Zehner, dann die Einer: 148+30+20+10+8), oder auch Marc-André, der dabei Schwellenzahlen ausnutzte (148+2+50+16). Schließlich lösten auch einige Schüler – wie etwa Nadine – die Problemstellung durch das Heranziehen einer Hilfsaufgabe (216–150+2).

Diese Beispiele verdeutlichen, wie reichhaltig und vielfältig das Denken der Kinder sein kann, wenn es Gelegenheit bekommt sich zu artikulieren. Wie diese Heterogenität im Unterricht genutzt werden kann, damit die Schüler zunehmend elegantere, effizientere und weniger fehleranfällige Methoden entwickeln, ist beispielsweise von Treffers (1983) aufgezeigt worden.

2.4 Kinder rechnen anders als eben noch bei „derselben" Aufgabe

Dass eine solche Vielfalt der Lösungswege nicht nur bei verschiedenen Schülern, sondern sogar bei demselben Kind bei „strukturgleichen" Aufgaben beobachtet werden kann, zeigt sich im folgenden Beispiel. Jakub wurde im 2. Schuljahr, bevor die Multiplikation behandelt worden war, die Aufgabe 24:4 einmal als Aufteil- und einmal als Verteilaufgabe gestellt.

Die Aufteilaufgabe lautete: „Mit einem Fahrstuhl wollen 24 Leute nach oben fahren und der Fahrstuhl nimmt immer 4 Leute mit. Wie oft muss er fahren, damit alle nach oben kommen?" Von der Struktur gedacht geht es darum, zu ermitteln, aus wie vielen Vierermengen die 24 besteht.

7.
Wie bist du darauf gekommen?
Ah, 6.
Kannst du mal erklären?
Ähm, ich habe das so gemacht: Äh, 4 plus 4 ist 8, und noch mal 8 – ähm –, dann sind es, ähm, 16, dann viermal ist er hochgefahren und dann muss er noch zweimal fahren, dann sind es 7.
Dann sind es 6.
Ja, 6.

Jakubs Vorgehen, Teilmengen in der Größe des Divisors (in diesem Fall 4) zu erzeugen und deren Anzahl zu ermitteln, kann *aufteilnahes Rechnen* oder *Bündeln* genannt werden. Dieses Vorgehen ist im Einklang mit der Aufgabenstruktur.

Um die Aufgabe zu lösen, kann man jedoch nicht nur ermitteln, wie viele Vierer die 24 enthält (additiv: 4+4+4+4+4+4=24 oder multiplikativ: x·4=24), sondern man kann auch eine Zahl suchen, deren Vierfaches 24 ist (multiplikativ ausgedrückt: 4·x=24). Diese Vorgehensweise, so viele Teilmengen zu bilden, wie es der Divisor vorgibt (in diesem Fall 4), deren jeweilige Mächtigkeit zu vermuten und dann zu prüfen, ob deren „Summe" den Dividenden ergibt, kann als *verteilnahes Rechnen* oder *Aufsplitten* bezeichnet werden (6+6+6+6=24). Jakub verwendete sie etwa zehn Minuten später, als ihm die Aufgabe 24:4 erneut gestellt wurde, diesmal in einem Verteilkontext: „Die Oma hat 24 Bonbons mitgebracht; die verteilt sie gerecht an 4 Kinder. Wie viele Bonbons bekommt jedes Kind?"

6!
Mmh, wie bist du darauf gekommen?
Ähm, äh, 6 plus 6 ist 12, und – ähm – da sind 2, 2 Kinder. Und noch mal – äh – 6 und noch mal 6 sind noch mal 12. Und 12 plus 12 sind 24, und dann sind viermal.
Mmh. Wie bist du am Anfang auf die 6 gekommen?
Zuerst hab ich mit Fünfern versucht das zu rechnen, aber das ging nicht. Ähm, aber dann hatte ich angefangen mit Sechsern und – äh, äh – ich habe es so gemacht, wie ich's erklärt hab.
Mmh. Gut. Dann hast du's mit Sechsern probiert.

Beide Aufgaben hängen eng mit der Geteiltaufgabe 24:4 zusammen. Jakub wählt kontextabhängig die jeweilige Lösungsstrategie aus: Im Aufteilkontext gestellt löst er sie mit einer aufteilnahen, im Verteilkontext mit einer verteilnahen Strategie. Jedoch muss die Aufgabenstruktur den Lösungsweg keineswegs vorherbestimmen. Auch hierzu ein Beispiel:

Zu Beginn des 3. Schuljahres wurden Sebastian Aufgaben vorgelegt, die Verteilsituationen repräsentieren sollten. Ein erstes Beispiel lautete: „Mark kauft Luftballons für seinen Geburtstag. Er kauft 4 Packungen, und in jeder sind gleich viele Luftballons. Insgesamt hat er 52 Stück. Wie viele sind in jeder Packung?"

Sebastian löste die Aufgabe, indem er zunächst für jede Packung zehn Luftballons „veranschlagte" und deren Gesamtzahl mit 40 berechnete. Dann „legte" er (wahrscheinlich) insgesamt dreimal reihum einen zusätzlichen Ballon in jede Packung und ermittelte jeweils die Gesamtzahl der Ballons, bis er schließlich die 52 erreichte.

---

52 – (flüstert) **wie viele Packungen kauft er...** (20 Sekunden später) **13.**
Woher weißt du das denn so schnell?
Ich hab erst gedacht 10, da waren's 40, und dann hab ich noch mal – jetzt, wie hab ich's weitergemacht – hab ich noch mal 4, glaube ich, dann waren's 44, dann noch mal 4, dann waren's 48, und dann noch mal – hä?
Hm, könnte ja sein. – Hast du dir immer überlegt – hast du angefangen, wenn 10 in einer Packung wären, wären's 40 oder so?
Hm.
Und dann hast du immer noch mal einen dazugetan oder so.
Hm, glaub so.
Und dann kamst du auf 13.
Hmh.

Er rechnete jedoch keineswegs bei jeder Verteilaufgabe verteilnah, sondern bisweilen durchaus auch aufteilnah, wie sich etwa bei der sog. Bootaufgabe zeigte: „Auf einem See sind 200 Leute mit einem Ruderboot unterwegs. Insgesamt sind auf dem See 40 Ruderboote, und in jedem sind gleich viele Leute. Wie viele sind in jedem Boot?" Nach etwa vier Minuten gab Sebastian seine Lösung wie folgt an:

5.
Woher weißt du das denn?
Äh – ich hab – irgendwie – äh – ich hab erstmal – nee, weiß ich nicht.
Weißt du gar nicht mehr, was du überlegt hast?
Den Anfang ... ich hab – ich hab erstmal – wie viele Boote waren das jetzt ...
40 Boote.
Ich hab erstmal 40 und dann noch mal die 40, das waren 80 dann, und noch mal 40, das waren 120, da hatte ich schon dreimal – da habe ich auch immer gezählt, wie oft ich die 40 nehme, und dann hatte ich viermal die 40 genommen – und fünfmal, und dann kam ich auf 200.

Sebastian ermittelte also, wie oft die 40 in die 200 hineinpasst. Hierbei handelt es sich um eine ganz andere Herangehensweise, als sich zu überlegen, was sich ergibt, wenn 200 in 40 gleich große Teile zerlegt wird (5+5+5+ ... +5+5+5 =200).

Die von uns vorgenommene Interpretation, dass Sebastian bei der Ballonaufgabe verteilnah und bei der Bootaufgabe aufteilnah rechnete, basiert nicht nur auf den vorliegenden Transkripten, sondern auch auf Videoaufzeichnungen sowie auf der Analyse seines Lösungsverhaltens bei weiteren Geteiltaufgaben. Liegt ausschließlich das Transkript vor, so kann die jeweils andere Deutung nicht vollkommen ausgeschlossen werden, dass er bei der Ballonaufgabe aufteilnah („10 Vierer sind 40, dann noch ein Vierer, ...") bzw. bei der Bootaufgabe verteilnah rechnete („zunächst jeweils eine Person in jedes Boot, dann noch eine, ..."). Dieses Beispiel zeigt erneut, dass Vermutungen über Lösungswege von Schülern stets mit Vorsicht angestellt werden sollten.

Der Eindruck, dass Kinder anders rechnen als eben noch bei derselben Aufgabe, ist unser Eindruck, den wir als geübte Rechner gewinnen. Für die Kinder kann es sich jedoch bei zwei „gleichen" Aufgaben um zwei ganz verschiedene Dinge handeln. Somit können vollkommen unterschiedliche Vorgehensweisen zu deren Lösung entwickelt werden. Dabei ist die Entscheidung, welche Strategie gewählt wird, sicherlich nicht nur von der Aufgabenstruktur abhängig, sondern ist eingebunden in ein komplexes Geflecht von Gedanken, die u. a. auch um die Zahlengröße kreisen und von der Fragerichtung oder persönlichen Vorlieben abhängen (vgl. hierzu beispielsweise auch D 7 in Kap. 4.1).

Zu guter Letzt: Zur Kommunikation gehören immer (mindestens) zwei Personen. Warum erwähnen wir diese scheinbare Trivialität? Alles, was wir in diesem Kapitel über das Rechnen (und damit implizit auch über das Denken) der Kinder gesagt haben, trifft natürlich auch auf das Denken von uns Erwachsenen zu: Aus dem Blickwinkel der Kinder denken Erwachsene anders

- ... als sie selbst
- ... als sie es vermuten
- ... als andere Erwachsene
- ... als eben noch in vergleichbaren Situationen.

Leider scheint es in der Schule so zu sein, dass es im Wesentlichen die Kinder sind, die lernen müssen, wie die Erwachsenen denken, anstatt dass auch die Erwachsenen lernten, wie die Kinder denken.

Viel Geld!

Eine erste Klasse. Die Kinder rechnen in ihrem Rechenbuch Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10. Ganz hinten in der Ecke beschäftigt sich Sven anderweitig. Er reißt von einem Blatt Papier Zettelchen ab, kritzelt etwas drauf und steckt sie dann in die Hosentasche. Ich gehe zu ihm hin und frage: „Und was machst du?" „Geld", sagt er ohne sich groß stören zu lassen. Wieder reißt er ein Zettelchen ab und schreibt: ‚1000000'. „Wie viel hast du denn schon?" frage ich. Er kramt seine Zettelchen aus der Hosentasche, zählt sie und sagt: „Sechs Millionen." „Nicht schlecht", sage ich, „machst du mir auch einen Geldschein? – Mir würden aber erst mal Hunderttausend reichen." Er tut's und schreibt ‚100.000'. Ich: „Da gebe ich heute gleich tausend Mark aus. Dann hab ich ja noch 'ne ganze Menge übrig". Sven überlegt kurz und sagt: „Neuntausend." Ich gebe mich zufrieden.

Christa Erichson

12 + 12 = 12

Huy, ein sechs Jahre altes Kind aus Vietnam, sagt mir ganz stolz: „Ich weiß, wie viel 12 und 12 ist." Dabei wirft er einen flüchtigen Blick auf die Uhr, die im Klassenzimmer hängt. Neugierig frage ich ihn: „Wie viel denn?" Er antwortet: „12 Uhr." „Wieso?" „Na, weil der kleine und der große Zeiger beide auf der 12 sind."

Julie Menne

Geht nicht!

In einer ersten Klasse wird im Zehnerraum gerechnet. Die Kinder sitzen im Kreis.
Zwei große Schaumstoffwürfel werden in die Mitte geworfen, deren Augenzahlen zusammengerechnet werden sollen. Als der Glücksfall zwei Sechser eintritt, schallt es aus allen Kehlen:
„Geht nicht!"

Christa Erichson

Zu viele Vornamen

Die Schule ist aus. Ich räume noch ein wenig den Klassenraum auf, als Wim-Paul (fast 6 Jahre) sich zu mir gesellt. Er wartet auf seine Schwester Lucinde, die mit ihm nach Hause gehen soll. Ich frage ihn, ob er noch weitere Geschwister hat. „Ja", antwortet er, „ich habe noch einen kleinen Bruder, Bart, der ist 1 Jahr alt." „Kann der denn schon sprechen?", frage ich. „Ja, der kann schon Mama, Papa und Lucinde sagen." „Und nicht Wim-Paul?", frage ich erstaunt. Er schaut mich ganz überrascht an. Ich wiederhole meine Frage: „Dein kleiner Bruder kann Lu-cin-de sagen, aber nicht Wim-Paul?" „Nein, natürlich nicht. Ich hab doch zwei Vornamen."

Julie Menne

Kannst du mal ein Bild malen?

Am Wochenende sitzen wir morgens oft zu dritt im Bett. Wenn wir nicht lesen, unterhalten wir uns. Eines Samstags kommen wir aufs Rechnen. Maxim (6) will uns zeigen, wie gut er schon rechnen kann, und verlangt, dass wir ihm schwierige Aufgaben stellen: „Auch mit mal und geteilt." Wir tasten uns im Schwierigkeitsgrad behutsam vorwärts. Irgendwann kommt die Aufgabe 16:4 an die Reihe. Maxim denkt nach und sagt dann: „4." „Wie hast du das denn herausbekommen?" „Ich hab erst 16 : 2 gemacht, das war 8, und dann 8 : 2, und dann war das 4." Wir wollen wissen, was sich Maxim dabei vorgestellt hat, und bitten ihn: „Kannst du mal ein Bild malen!" Wir erwarten, dass er uns eine Veranschaulichung für die Aufgabe 16 : 4 liefert. Er jedoch hat unsere Aufforderung ganz anders verstanden. So etwas, glaube ich, passiert häufiger, als wir denken.

Christoph Selter