

Wie Kinder rechnen

von
Christoph Selter
und Hartmut Spiegel

Ernst Klett Grundschulverlag
Leipzig Stuttgart Düsseldorf

Wie Kinder rechnen
von Christoph Selter und Hartmut Spiegel

Weitere Informationen zu den Eigenproduktionen
auf dem Umschlag erhalten Sie in den Dokumenten
D 12, D 18, D 23 und D 27 (S. 59 ff.).

Die deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Selter, Christoph: Wie Kinder rechnen / von Christoph Selter
und Hartmut Spiegel. - 1. Aufl., 1. Dr. - Leipzig ; Stuttgart ;
Düsseldorf : Klett-Grundschulverl., 1997

ISBN 3-12-199098-5

NE: Spiegel, Hartmut

1^{10 9 8 7} | 2009 2008 2007

Dieses Werk folgt der reformierten Rechtschreibung
und Zeichensetzung. Alle Drucke dieser Auflage können
nebeneinander benutzt werden, sie sind
untereinander unverändert.

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Druckes.
© Ernst Klett Grundschulverlag GmbH, Leipzig 1997.
Alle Rechte vorbehalten.

Redaktion: Maria Wieghardt (Düsseldorf)

Satz: Sabine Bremer, Düsseldorf
Druck: Druckhaus Beltz, Hemsbach

ISBN 3-12-199098-5

Vorwort

Das vorliegende Buch ist Ergebnis unserer mehrjährigen, fruchtbaren Kooperation, bei der wir sehr von der Zusammenarbeit mit Kindern, Eltern, Lehrern, Studierenden, Mitarbeitern, Kollegen und – last but not least – unseren Ehefrauen profitiert haben. Allen Beteiligten möchten wir an dieser Stelle ganz herzlich danken:

... den Kindern dafür, dass sie sich so geduldig und bereitwillig mit den ihnen gestellten Aufgaben auseinander gesetzt und uns dadurch unschätzbare Einblicke in ihr Denken ermöglicht haben,

... deren Eltern, dass sie uns die nicht selbstverständliche Zustimmung gegeben haben, ihre Kinder zu filmen und die Dokumente für die Lehrerbildung zu verwenden,

... den Lehrern (insbesondere denen der Marienschule in Paderborn) für ihre vielfältige Unterstützung,

... den Studierenden, die den überdurchschnittlich hohen Arbeitsaufwand für diese Art von Examensarbeiten im Rahmen eines Forschungsprojektes nicht gescheut haben und u.a. viele (unbezahlte!) Stunden mit der mühsamen Arbeit des Transkribierens zugebracht haben,

... den Mitarbeitern, die sich nicht nur um die vielen technischen Belange der Dokumentation gekümmert haben, sondern auch als stets konstruktiv-kritische Gesprächspartner zum Fortschreiten der Arbeit beigetragen haben,

... den Kollegen – insbesondere den Teilnehmern der ‚Paderborner Grundschul-Gespräche‘ –, die uns immer mit fachkundigem Rat zur Seite standen

... und unseren Ehefrauen, die nicht nur toleriert haben, dass während der letzten Jahre viel Zeit in die Arbeit an diesem Buch geflossen ist, sondern die auch dazu beigetragen haben, dass wir mit den Kindern arbeiten konnten, die uns Material, Tipps und Hinweise gegeben und zudem viel von ihrer eigenen Zeit in dieses Buch investiert haben.

Ohne das Verdienst aller anderen Beteiligten schmälern zu wollen, möchten wir folgende Personen wegen ihrer – in unterschiedlicher Hinsicht – ganz besonderen Beiträge beim Zustandekommen dieses Buches namentlich erwähnen:

Sabine Bremer, Andrea Fromm, Elmar Hengartner, Silke Kreling, Cheryl Lubinski, Annika Müller, Gerhard Norbert Müller, Verena Richter, Tim Rostek, Christiane Schütte, Ulrich Schwätzer, Jule Spiegel, Beate Sundermann, Bernadette Thöne, Adri Treffers, Manfred Wettler, Maria Wieghardt und Erich Christian Wittmann.

Bochum und Paderborn, im Mai 1997

Christoph Selter, Hartmut Spiegel

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | Einleitung | 8 |
| 2 | Kinder rechnen anders | 10 |
| 2.1 | Kinder rechnen anders, als wir selbst rechnen | 11 |
| 2.2 | Kinder rechnen anders, als wir es vermuten | 12 |
| 2.3 | Kinder rechnen anders als andere Kinder | 14 |
| 2.4 | Kinder rechnen anders als eben noch bei „derselben“ Aufgabe | 15 |
| 3 | Studium von Erfahrungsberichten | 20 |
| 3.1 | Rechenfähigkeit von Schulanfängern | 20 |
| 3.2 | Eigene Rechenstrategien zur Division | 25 |
| 3.3 | Zum Umgang mit „unlösbaren“ Textaufgaben | 30 |
| 3.4 | Rechenwege bei der Addition dreistelliger Zahlen | 36 |
| 4 | Analyse von Dokumenten | 46 |
| 4.1 | Dokumente | 46 |
| | D 1: Rechenfähigkeit am Ende der Kindergartenzeit und ihre Entwicklung | 47 |
| | D 2: Zur Entwicklung der Rechenfähigkeit von Angelika | 48 |
| | D 3: Besonderheiten beim Zählen von Schulanfängern | 49 |
| | D 4: Wie Erstklässler mit Darstellungen größerer Zahlen umgehen | 50 |
| | D 5: Informelle Vorgehensweisen zur Addition im Hunderterraum | 51 |
| | D 6: Informelle Vorgehensweisen zur Subtraktion im Hunderterraum | 52 |
| | D 7: Subtraktion im Hunderterraum – Lösungswege von Jo-Ann | 53 |
| | D 8: Subtraktion im Hunderterraum – Lösungswege von Ivo | 54 |
| | D 9: Multiplikatives Rechnen zu Beginn des 2. Schuljahres | 55 |
| | D 10: Informelle Vorgehensweisen bei einer Verteilungsaufgabe | 57 |
| | D 11: Langfristige Lernprozesse beim multiplikativen Rechnen | 58 |
| | D 12: Zahlentreppe – Zweitklässler beschreiben und begründen im Rahmen von Rechenübungen | 59 |
| | D 13: Mündliche Division: Lina und Sebastian | 60 |
| | D 14: Mündliche Division: Annika rechnet $60:4$ | 61 |
| | D 15: Mündliche Division: Verschiedene Rechenwege bei der Aufgabe $200:40$ | 62 |
| | D 16: Mündliche Division: Janas Lösungswege zu $60:12$ | 63 |
| | D 17: Informelle Rechenstrategien zur Subtraktion im Tausenderraum | 64 |
| | D 18: Informelle Strategien zur Addition zu Beginn des 3. Schuljahres | 65 |
| | D 19: Dennis und Sebastian bearbeiten „Kapitänsaufgaben“ | 66 |
| | D 20: Zahlenketten – Vorgehensweisen von Drittklässlern | 68 |
| | D 21: Zum Rechnen mit Nummern | 69 |
| | D 22: Viertklässler bearbeiten „Probleme der Woche“ | 71 |
| | D 23: Fehleranalysen bei der schriftlichen Subtraktion | 72 |
| | D 24: Fehlermuster bei der schriftlichen Multiplikation | 73 |
| | D 25: Schwierigkeiten beim Erklären der schriftlichen Division | 74 |
| | D 26: Zum Rechnen mit der Null | 76 |
| | D 27: Schülerlösungen als Anlässe zum Mathematiktreiben | 78 |
| 4.2 | Weiterführende Hinweise | 79 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 5 | Durchführung von Erkundungsprojekten | 100 |
| 5.1 | Zur klinischen Methode | 100 |
| 5.2 | Erkundungsprojekte | 112 |
| | E 1: Bildsachaufgaben zu arithmetischen Vorkenntnissen | 113 |
| | E 2: Schachtel- und Textaufgaben zu arithmetischen Vorkenntnissen | 121 |
| | E 3: Orientierung im Dezimalsystem | 123 |
| | E 4: Mündliche Multiplikation und Division | 128 |
| | E 5: Kapitänsaufgaben | 131 |
| | E 6: Rechnen mit Nummern | 132 |
| | E 7: Zum Verständnis der schriftlichen Subtraktion | 136 |
| | E 8: Rechnen mit der Null | 138 |
| | E 9: Summen aufeinander folgender Zahlen | 140 |
| 5.3 | Organisatorisches, Videotechnik, Transkription | 144 |
| 6 | Literatur | 154 |
| 6.1 | Zitierte Literatur | 154 |
| 6.2 | Liste der verwendeten Examensarbeiten | 160 |

1 Einleitung

Auf den ersten Seiten des berühmten Buchs „Der kleine Prinz“ versetzt der Erzähler die Leserin zurück in seine Kindheit. Im Alter von sechs Jahren las er ein Buch über den Urwald, das ihn außerordentlich beeindruckte. Er erfuhr, dass die dort beheimatete Boa Constrictor Tiere als Ganzes verschlingen kann und dann wochenlang ruht um zu verdauen. Dieses Wunder der Natur beschäftigte ihn nachhaltig. So beschloss er ein Bild zu malen (Abb. 1a).



Abb. 1a: Ein Hut ...

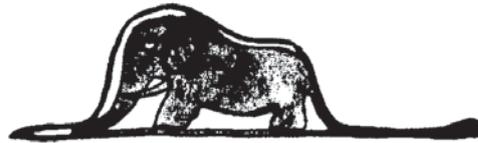


Abb. 1b: ... oder eine satte Riesenschlange?

Er zeigte sein Meisterwerk den großen Leuten und fragte sie, ob sie davor keine Angst hätten. Zu seiner Überraschung verstanden sie ihn überhaupt nicht und antworteten: „Warum sollten wir vor einem Hut Angst haben?“ Er jedoch hatte keinen Hut gemalt, sondern eine Riesenschlange, die gerade einen Elefanten verschlungen hatte. Um dieses den Erwachsenen ganz deutlich zu machen fertigte er eine zweite Zeichnung an, die das Innere der Boa darstellte (Abb. 1b) – allerdings ohne den gewünschten Erfolg zu erzielen.

Die großen Leute rieten ihm daraufhin, mit dem Zeichnen von offenen und geschlossenen Riesenschlangen aufzuhören. Stattdessen, so ihr Ratschlag, solle er sich verstärkt für Geographie, Geschichte, Rechnen und Grammatik interessieren. Somit gab er eine viel versprechende Laufbahn als Maler auf, bevor sie richtig begonnen hatte. Der Misserfolg seiner Zeichnungen hatte ihm den Mut genommen: „Die großen Leute verstehen nie etwas von selbst, und für die Kinder ist es zu anstrengend, ihnen immer und immer wieder erklären zu müssen“ (de Saint-Exupéry 1982, 6).

Es ist schade, wenn Kinder ihre Versuche aufgeben, Erwachsenen etwas zu erklären. Die kleinen und die großen Leute könnten viel mehr voneinander lernen, wenn Kinder häufiger ihre Gedanken darlegen und die Erwachsenen gut zuhören würden. Denn wie in der geschilderten Episode scheinen die Denkwege von Kindern häufig unverständlich oder gar unsinnig zu sein. Das ist jedoch unsere – oft voreilige – Interpretation. Denn wir sind häufig zu stark auf unsere eigene Sicht der Dinge fixiert und daher nicht in der Lage, die innere Logik ihres Denken wahrzunehmen und angemessen zu würdigen.

Kinder ernst zu nehmen bedeutet daher ganz wesentlich auch, sie dabei zu unterstützen, das eigene Denken auszudrücken. Für den Unterricht heißt das: Wollen wir Schülern helfen ihr Denken zu entwickeln – statt sie darüber zu belehren, wie sie zu denken haben –, dann müssen wir ihnen besser zuhören, sie zur Darstellung ihrer Gedanken mit eigenen Ausdrucksmitteln anregen und ein Unterrichtsklima schaffen, das die Verständigung über die unterschiedlichen Denkwege fördert.

In keinem anderen Fach scheint uns die Unterrichtsrealität von diesem Anspruch so weit entfernt zu sein wie in der Mathematik. Häufig sind wir Erwachsenen nämlich nicht mehr dazu in der Lage, uns in das mathematische Denken unserer Schüler einzufühlen, weil sich unser eigenes Denken schon zu weit davon entfernt hat. Der Mathematikdidaktiker Freudenthal (1978, 74) hat das einmal so ausgedrückt: „Was für uns banale Gewohnheiten sind, werden fundamentale Entdeckungen, wenn wir es bei Jüngeren, weniger Routinierten entstehen sehen – so etwas muss man gesehen und erlebt haben, damit es einem recht auffalle; da genügt auch ein geschriebener und gedruckter Bericht nicht.“

Der erste Teil dieses Zitates macht deutlich, warum der Beruf der Grundschullehrerin so anspruchsvoll ist: Sie steht den Kindern bei der Bewältigung von Schwierigkeiten in Dingen zur Seite, in denen sie selbst gar keine Schwierigkeiten mehr zu erkennen vermag, weil diese für sie banale Gewohnheiten geworden sind. Der zweite Teilsatz deutet an, welche Anstrengungen man unternehmen muss, um die eigene Sensibilität für das mathematische Denken von Kindern zu erhöhen. Das vorliegende Buch soll hierbei eine Hilfe darstellen.

Zum Aufbau des Buches: Zunächst wollen wir im 2. Kapitel anhand repräsentativer Beispiele darstellen, dass es neben der Perspektive der *Lehrenden* immer auch diejenigen Sichtweisen gibt, mit denen die *Lernenden* dem Lerngegenstand begegnen. Wir führen aus, dass Kinder häufig anders rechnen, als wir selbst rechnen (2.1), dass sie anders rechnen, als wir es vermuten (2.2), dass sie anders rechnen als andere Kinder (2.3) und dass sie anders rechnen als eben noch bei „derselben“ Aufgabe (2.4).

Wir wollen damit aufzeigen, dass wir das mathematische Denken von Kindern nicht als tendenziell defizitär, sondern als prinzipiell anders ansehen. Gutes Unterrichten geht von dieser Prämisse aus und setzt daher eine gewisse Sensibilität hierfür voraus. In den folgenden drei Kapiteln beschreiben wir am Beispiel arithmetischer Inhalte unterschiedliche Möglichkeiten, um lernen zu können, wie Kinder rechnen: das Studium von Erfahrungsberichten (3. Kap.), die Analyse von Dokumenten (4. Kap.) sowie die Durchführung von Erkundungsprojekten (5. Kap.). Diese drei Formen sind durch ein unterschiedliches Maß sowohl an Unmittelbarkeit der Erfahrung als auch an zu investierender Eigenaktivität gekennzeichnet.

Im 3. Kapitel werden die Denkwege von Kindern exemplarisch dokumentiert. Die vier Beispiele aus unserer Forschungsarbeit befassen sich mit folgenden Themen: arithmetische Vorkenntnisse von Schulanfängern (3.1), informelle Rechenstrategien von Zweitklässlern zur Division (3.2), Umgang von Drittklässlern mit „unlösbaren“ Textaufgaben, den sog. Kapitänsaufgaben (3.3), sowie selbst entwickelte Rechenstrategien bei der Addition dreistelliger Zahlen zu Beginn des dritten Schuljahres (3.4).

Das 4. Kapitel soll die Leserin dazu anregen, selbst die Denkwege von Schülern anhand von Dokumenten zu analysieren. Darunter verstehen wir erstens schriftliche Schülerdokumente aus dem Unterricht bzw. aus Interviews – so genannte Eigenproduktionen –, zweitens Transkripte von Unterrichts- oder Interviewsequenzen sowie drittens Episoden, in denen Begebenheiten aus dem Unterricht oder aus dem Alltag beschrieben werden. Insgesamt 27 kopierfähige Dokumente, die wesentliche Inhalte des Arithmetikunterrichts der ersten vier Schuljahre berühren, wurden von uns mit Denkanstößen versehen, die die Leserin zur reflektierten Auseinandersetzung mit dem vorliegenden Datenmaterial anregen sollen (4.1). In Kap. 4.2 geben wir darauf bezogene, weiterführende Informationen.

Wie wir im 5. Kapitel ausführen, ist es sicherlich am lehrreichsten, Primärerfahrungen im Rahmen selbst durchgeführter Erkundungsprojekte zu sammeln – etwa in Form von Interviews mit (Vor- und) Grundschulkindern. Hintergrundinformationen zu Prinzipien des Interviewens geben wir in Kap. 5.1. Dort gehen wir auch auf mögliche Schwierigkeiten ein und zeigen auf, wie man auf diese reagieren bzw. sie verhindern kann. Zur Konkretisierung und als Orientierung beschreiben wir in Kap. 5.2 neun erprobte Interviewleitfäden, die sich auf zentrale Themen der Grundschularithmetik beziehen. Die dort aufgeführten Aufgabenstellungen eignen sich im Übrigen auch gut, um in den normalen Unterricht zur Standortbestimmung und zur Erkundung der Denkwege der eigenen Schüler integriert zu werden. In Kapitel 5.3 schließlich finden sich Erfahrungen und Tipps organisatorischer und technischer Art, die unseres Erachtens die Durchführung und Auswertung solcher Interviews erleichtern können.

Das vorliegende Buch verstehen wir auch als einen Beitrag zur Umsetzung unserer hochschuldidaktischen Überlegungen zur Ausbildung angehender Grundschullehrerinnen. Interessierte Leserinnen möchten wir auf weitere diesbezügliche Ausführungen in Spiegel (1995a; 1996; 1996a; in Vorb.) sowie in Selter (1995c; 1997; 1997a; in Vorb.) verweisen.

Mein dritter Schuh

Da in der Kindersprache die Worte „zwei“ und „drei“ oftmals in „dei“ und „dei“ ununterscheidbar mutieren, beschloss ich im Kleinkindalter, dass ein Wort wohl genügen solle in der Zahlenreihe. Ich zählte munter „eins, drei, vier, fünf ...“ und selbst später – ich muss so ungefähr fünf Jahre alt gewesen sein – verlängerte sich die Zahlreihe konsequent mit „zehn, elf, dreizehn, vierzehn, fünfzehn ...“.

Zum geflügelten Wort in unserer Familie brachte es jedoch folgendes Intermezzo. Ich, als Zwei- oder Dreijährige (da gab's bei mir ja eh keinen Unterschied), sollte mich zum Spaziergehen ankleiden. Die Verzweiflung war jedoch groß, da ich nur einen meiner Schuhe fand. So stand ich schließlich mutlos in der Küche und rief: „Wo ist mein dritter Schuh?“

Anna Susanne Steinweg
