Anzahlbestimmung mit Hilfe fundamentaler Zählstrategien

Georg Schrage (1996) nennt sieben für die Kombinatorik besonders bedeutsame Zählprinzipien, die es seines Erachtens ermöglichen alle Aufgaben auf dem Level der Schulmathematik zu lösen. Um diese Prinzipien anwenden zu können ist es notwendig die Lösungen gedanklich oder bildlich zu strukturieren. In einer Studie wurde festgestellt, dass bereits Drittklässler Ansätze dieser Prinzipien bei der Lösung kombinatorischer Aufgabenstellungen nutzen (vgl. Höveler, in Vorb.). Im Folgenden sehen Sie Beispiele[1] zu den von Schrage (ebd.) benannten Prinzipien:

1. Das Fubiniprinzip (Rule of Counting in two ways)	
Zwei Formeln oder Rechenwege, die die gleiche Menge auszählen müssen gleich sein.	Das Fubiniprinzip wurde in den Interviews nicht verwendet. Es kommt im Unterricht zum Tragen, wenn die Kinder verschiedene Lösungswege nutzen und feststellen, dass die verschiedenen Lösungswege alle zu dem gleichen Ergebnis führen.
2. Das Prinzip des indirekten Zählens (Gleichheitsregel)	
Die gesuchte Anzahl zu einem gegebenen Problem wird bestimmt, indem man diese durch ein äquivalentes, aber einfacheres Problem ersetzt, dessen Anzahl bestimmt oder ggf. bereits kennt und entsprechend auf das eigentliche Problem überträgt.	*Caro hat bereits herausbekommen, dass es bei vier Mannschaften sechs Fußballspiele gibt. Sie wird nun gebeten herauszufinden, wie viele Fußballspiele es auf einem Turnier mit fünf Mannschaften gibt. Zur Lösung macht sie sich die Isomorphie zwischen der Lotto- und der Fußballaufgabe zunutze:* I: Kannst du mir auch sagen, wie viele Spiele es bei fünf Fußballmannschaften gibt? C: Erst gibt es sechs und dann gibt es zehn. Das ist ja so wie bei den Kugeln. *Die Interviewerin bittet Caro zu erklären, warum man die Aufgaben gleich berechnen kann:.* C: Das funktioniert, weil das hat sozusagen beides den gleichen Sinn. Beides sind Kärtchen die zählt man zusammen. Also beides ist gleich also zum Beispiel Fußballspiele und Kugeln.
3. Das Prinzip der Rekursion	
Die Grundidee des Rekursionsprinzips ist es soweit „zurückzulaufen" bis man die Anzahl zu einer Auswahl kennt und ausgehend von dieser zu überlegen, wie viele weitere Möglichkeiten fehlen, um die gesuchte Figurenmenge zu bestimmen.	*Luca hat bereits herausbekommen, dass es auf einem Turnier mit fünf Mannschaften insgesamt zehn Spiele gibt. Dieses Wissen nutzt er, um die Anzahl aller Spiele auf einem Turnier mit sechs Mannschaften zu bestimmen* L: Dann wären das fünfzehn Spiele glaube ich I: Wie hast du das denn so fix gemacht? Das ging ja schnell. L: Weil, also ich hab einfach, ich hab einfach nur, äh, ähm zehn plus fünf gerechnet. Weil ich wusste ja die *(zeigt auf die neu hinzugekommene Mannschaft*), die musste ja gegen fünf spielen (*zeigt auf die anderen fünf Mannschaften)* und…und…so genau kann ich das eigentlich gar nicht erklären. I: Woher könnte denn wohl die Zehn kommen? L: Weil hier waren ja schon vorher Mannschaften. Und wenn jetzt um Beispiel die Mannschaft *(zeigt auf die neue Mannschaft)* ganz weit weg wohnt, dann brauchen die auch ganz lange um dann erst mal anzukommen und dann hatte ich ja schon mal Zeit das alles aufzumalen und das zu zählen und dann kamen die dann ja irgendwann und dann brauchte ich das nur noch da zusammenzurechnen. *Bei sieben Mannschaften nutzt Luca das gleiche Vorgehen:* bei 6 15 möklichkaiten+6=21

[1] [1] Die Interviewszenen und Schülerdokumente entstanden im Rahmen einer Untersuchung mit Drittklässlern (vgl. Höveler, in Vorb.)

4. Das Additionsprinzip (Regel des getrennten Abzählens, Summenregel)

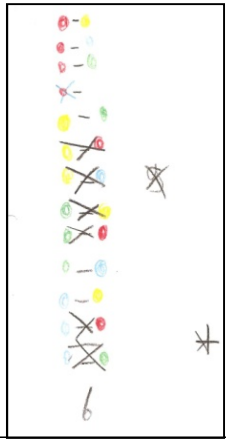
Um die Mächtigkeit einer Menge zu bestimmen wird sie zunächst systematisch in überschaubare Gruppen eingeteilt. Die getrennten Anzahlen können anschließend addiert werden Wesentlich ist dabei, dass es sich um disjunkte Gruppen handelt.

Malina bestimmt die Fußballspiele auf einem Turnier mit vier Mannschaften, durch folgende Rechnung: 3+2+1=6. Auf die Bitte der Interviewerin notiert sie alle Lösungen. Ihre Darstellung veranschaulicht ihre Überlegungen. Zunächst notiert sie alle Spiele von Mannschaft blau, anschließend alle Spiele von Mannschaft gelb, die noch nicht notiert wurden usw.

5. Die Ein- & Ausschaltformel (Siebformel, allgemeiner Additionssatz)

Das Prinzip verallgemeinert das Additionsprinzip. Es ermöglicht die Anzahlbestimmung über die Addition auch auf Mengen zu übertragen, deren Teilmengen nicht disjunkt sind. Man macht sich dabei zunutze, dass die Vereinigung zweier endlicher Mengen A und B genau der Differenz aus der Summe der beiden Mengen und der Schnittmenge von A und B entspricht:

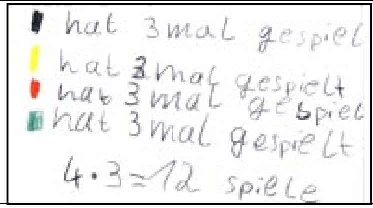
$|A \quad B|=|A|+|B|-|A \cap B|$



Melissa überlegt zunächst, wie viele Spiele eine Mannschaft hat und notiert der Reihe nach zu jeder Mannschaft alle Spiele, die diese bestreiten muss. Es gibt entsprechend zunächst vier Gruppen in denen jeweils die Spiele einer Mannschaft enthalten sind. Auf die Nachfrage der Interviewerin, ob sie sich sicher sei alle Lösungen gefunden und weder welche doppelt notiert noch welche vergessen zu haben stellt sie fest, dass sie einige Spiele doppelt notiert hat. Sie betrachtet die einzelnen Gruppen und streicht jeweils die doppelt notierten Paarungen nachträglich.

6. Das allgemeine Zählprinzip (Produktregel, Multiplikationsregel)

Anstatt die gesuchte Anzahl im Sinne des Additionsprinzips mühsam aufzusummieren, macht man sich die Erkenntnis zunutze, dass die Addition gleicher Summanden auch als Multiplikation aufgefasst werden kann.



Bei Lösen der Kombinatorikaufgaben ist auch zu beobachten, dass einige Kinder versuchen, die Aufgaben multiplikativ zu lösen, so beispielweise Leon:
Er überlegt sich ebenso, wie Melissa, wie oft jede Mannschaft spielen muss und erhält das Ergebnis drei. Das es vier Mannschaften erhält er die links angegebene Rechnung.

7. Das Prinzip der Schäfer (Quotientenregel)

Oft ist es nur schwer möglich, eine Anzahl in einem Zug zu bestimmen. Daher wird zunächst ein größerer Bestand gezählt, anschließend werden Klassen von Elementen gebildet, die unter einem bestimmten Aspekt als gleichwertig erachtet werden.

Ronja vermutet zunächst, dass es zwölf Spiele sind. Sie begründet ihre Antwort darüber, dass jede der vier Mannschaften dreimal spielt. Nachdem die Interviewerin sie gebeten hat alle Spiele zu notieren erhält sie sechs als Ergebnis. Es entsteht folgender Dialog:

> I: Aber warum waren das denn dann nicht zwölf, sondern sechs Spiele? Hast du irgendeine Idee?
> R:Weil das die Hälfte ist und ich vielleicht alle Spiele doppelt genommen habe.

Peter aus dem Einstiegsbeispiel begründet ähnlich:

> P: Jede Mannschaft spielt dreimal, aber es gibt´s aber sechs Spiele, weil, weil das ähm zwei Mannschaften immer gegeneinander spielen.